

Série A
N° 2420
N° D'ORDRE :
3292

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR ALBERT TORTRAT

1^{re} THÈSE. -- LES FONCTIONS ORTHOGONALES D'HERMITE A PLUSIEURS VARIABLES ET
RELATIONS D'INCERTITUDE DE HEISENBERG. LES CHAÎNES SIMPLES
CONSTANTES DE MARKOFF ET LEURS CORRÉLATIONS.

2^e THÈSE. -- PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 mars 1950 devant la Commission d'Examen

MM. J. PÉRÈS
G. DARMOIS
P. DUBREIL

Président.
}
Examineurs.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1953



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552427_0015

Série A
N° 2420
N° D'ORDRE :
3292

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR ALBERT TORTRAT

1^{re} THÈSE. — LES FONCTIONS ORTHOGONALES D'HERMITE A PLUSIEURS VARIABLES ET
RELATIONS D'INCERTITUDE DE HEISENBERG. LES CHAÎNES SIMPL
CONSTANTES DE MARKOFF ET LEURS CORRÉLATIONS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 mars 1950 devant la Commission d'Examen.

MM. J. PÉRÈS	<i>Président.</i>
G. DARMOIS	} <i>Examineurs.</i>
P. DUBREIL	

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1953

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... A. CHATELET.

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	H. CARTAN.....	T	Mathématiques générales.
A. DENJOY.....	T	Théorie des Fonctions.	SCHAEFFER.....	T	Physiologie des fonctions.
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et géologie dynamique.	LAFFITTE.....	T	Chimie (P. C. B.).
E. DARMOIS.....	T	Enseignement de Physique.	FAVARD.....		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
ROBERT LÉVY.....	T	Physiologie comparée.	COULOMB.....	T	Physique du Globe.
HENRI VILLAT.....	T	Mécanique des fluides et applications.	M ^{lle} COUSIN.....	T	Biologie animale (P. C. B.).
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	CHRÉTIEN.....		Chimie générale.
FOCH.....	T	Mécanique physique et expérimentale.	P. DRACH.....		Zoologie.
PAUTHENIER.....	T	Electrotechnique générale.	KASTLER.....		Physique.
DE BROGLIE.....	T	Théories physiques.	CHATELET.....	T	Arithmétique et théorie des nombres.
JOB.....	T	Chimie générale.	EPHRUSSI.....	T	Génétique.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.	WURMSER.....	T	Biologie physico-chimique.
COMBES.....	T	Physiologie végétale.	BAUER.....	T	Chimie-Physique.
GARNIER.....	T	Géométrie supérieure.	RIVIÈRE.....		Géologie (P. C. B.).
PÉRÈS.....	T	Mécanique rationnelle.	GAUTHERET.....		Biologie végétale (P. C. B.).
HACKSPILL.....	T	Chimie minérale.	LUCAS.....		Physique.
LAUGIER.....	T	Physiologie générale.	A. THOMAS.....		Évolution des êtres organisés
TOUSSAINT.....	T	Technique aéronautique.	ARNULF.....		Optique appliquée.
M. CURIE.....	T	Physique (P. C. B.).	MAX MORAND.....		Physique.
G. RIBAUD.....	T	Hautes températures.	SOLEILLET.....		Physique.
CHAZY.....	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.
CROZE.....	T	Physique théorique et Physique céleste.	DANJON.....	T	Astronomie.
DUPONT.....	T	Théories chimiques.	FROMAGEOT.....	T	Chimie biologique.
VALIRON.....	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	LAPORTE.....	T	Physique générale et Radio-activité.
BARRABÉ.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	JANET.....		Mathématiques générales.
VAVON.....	T	Analyse et mesures chimiques.	PETIT.....	T	Biologie maritimie.
G. DARMOIS.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématiques.	QUENEY.....	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
JACQUES BOURCART.	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	GALLIEN.....		Biologie animale (P. C. B.).
AUBEL.....	T	Chimie biologique.	EICHHORN.....		Biologie végétale (P. C. B.).
M ^{me} JOLIOT-CURIE.	T	Physique générale et Radio-activité.	DE CUGNAC.....		Biologie végétale (P. C. B.).
PLANTEFOL.....	T	Botanique.	LAVAL.....		Physique (P. C. B.).
CABANNES.....	T	Recherches physiques.	M ^{lle} CAUCHOIS.....		Chimie-Physique.
GRASSÉ.....	T	Évolution des êtres organisés.	THELLIER.....		Physique du Globe.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.	AUDUBERT.....		Electrochimie.
BOULIGAND.....	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	L'HÉRITIER.....		Génétique.
CHAUDRON.....	T	Chimie.	GRIVET.....	T	Radioclectricité.
WYART.....	T	Minéralogie.	PONCIN.....		Mécanique des Fluides.
TEISSIER.....	T	Zoologie.	THIERY.....	T	Mécanique appliquée.
MANGENOT.....	T	Biologie végétale.	DUBREIL.....		Mathématiques générales.
P. AUGER.....	T	Physique quantique et relative.	QUELET.....		Chimie (P. C. B.).
MONNIER.....		Physiologie générale.	CAGNIARD.....		Géophysique appliquée.
PIVETEAU.....	T	Géologie.	CHAMPETIER.....		Chimie appliquée.
ROCARD.....	T	Physique.	CUVILLIER.....		Géologie structurale et Géologie appliquée.
			JUNG.....		Pétrographie.
			TRILLAT.....		Physique (P. C. B.).
			WIEMANN.....		Chimie (P. C. B.).
			LICHNEROWICZ.....		Mathématiques.
			JACQUINOT.....		Physique (P. C. B.).
			VASSY.....		Physique de l'Atmosphère.
			DESTOUCHES.....		Théories physiques.

Secrétaire..... CH. MONIER.



A MES PARENTS

A MONSIEUR
GEORGES DARMOIS

A MONSIEUR
ROBERT FORTET

PREMIÈRE THÈSE.

I.

Les fonctions orthogonales d'Hermite et les relations d'incertitude.

INTRODUCTION.

Dans le livre de MM. Appell et Kampé de Fériet ⁽¹⁾ sont exposées les propriétés les plus simples des polynômes d'Hermite à plusieurs variables. Citons principalement :

Les propriétés d'orthogonalité, par la méthode d'Hermite (sans justification de la validité d'intégrations terme à terme);

Des théorèmes de développement pour les polynômes, mais non pour une fonction quelconque;

Les équations aux dérivées partielles satisfaites, écrites pour deux variables, avec intégration dans ce cas du système des quatre équations et remarque que la seule solution polynomiale est celle d'Hermite.

Dans un premier chapitre, nous notons tout d'abord, ou rappelons, et justifions, les formules concernant les fonctions génératrices et

Nota. — Ce travail, première partie d'une Thèse soutenue le 6 mars 1950 devant MM. J. Pérès, G. Darmon et P. Dubreil, constitue en presque totalité le développement de Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, présentées respectivement les 26 janvier et 16 février 1948 par M. J. Pérès, et le 22 décembre 1947 par M. Louis de Broglie.

(¹) APPELL et KAMPÉ DE FÉRIET, *Sur les séries hypergéométriques et polynômes d'Hermite.*

leurs relations mutuelles, la plénitude du système des fonctions d'Hermite ψ_{n_i} ou χ_{n_i} , et les équations aux dérivées partielles ou autres formules de dérivation relatives aux polynômes, aux ψ_{n_i} , χ_{n_i} , ou aux fonctions génératrices.

Suivant alors le calcul formel de M. Norbert Wiener ⁽²⁾ (qui conduit cet auteur à la formule de Mehler exprimant $\Sigma t^n \psi_n(x) \psi_n(y)$ et qu'il applique ensuite à l'étude de la transformation de Fourier et du théorème de Plancherel (comme cas limite des formules établies), nous donnons, pour les différentes sommes $\Sigma t_i^{n_i} Y_{n_i}(y) X_{n_i}(x)$ au nombre de seize (X_{n_i} , par exemple étant une fonction ψ ou χ d'Hermite relative à la forme φ ou à sa réciproque), l'expression de deux d'entre elles et les formules de passage de celles-ci aux autres; puis justifions ces calculs par deux méthodes, dont l'une s'appuie sur un travail de M^{me} Lebedeff ⁽³⁾ dans le cas d'une variable et met en évidence certaines propriétés des noyaux ainsi obtenus. Cette formule de Mehler généralisée avait déjà été démontrée sans que nous le sachions, par deux autres voies ⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾, aboutissant à une forme un peu différente dont nous établissons l'équivalence avec celle obtenue ici.

Il convient de noter des cas particuliers, comme par exemple la transformation de Fourier, et la généralisation des propriétés de développement uniformément convergent sur $(-\infty, +\infty)$ d'une fonction $f(x)$ suivant les $\psi_n(x)$.

Dans le deuxième chapitre, partant de relations aux dérivées partielles entre les $(e^{-\varphi} \mathcal{H}_{n_i})^2$ et $(e^{-\varphi} \mathcal{G}_{n_i})^2$, nous majorons la valeur absolue des fonctions d'Hermite, par les formules qui généralisent des résultats connus et très simples dans le cas d'une variable ⁽⁶⁾. Un lemme nous est nécessaire, sur la décomposition d'une forme

⁽²⁾ NORBERT WIENER, *The Fourier Integral and certain of its applications*.

⁽³⁾ W. MYLLER-LEBEDEFF, *Die theorie der Integral gleichungen in anwendung auf einige Reihenentwicklungen* (*Math. Ann.*, Bd. 64).

⁽⁴⁾ LOSCHMIEDER, *Math. Z.*, t. 43, 1938, p. 783-792.

⁽⁵⁾ ERDILYI, *Math. Z.*, t. 44, 1938, p. 201-211.

⁽⁶⁾ IYENGAR, *Proc. Ind. Acad. Sc.*, p. 211.

quadratique (ou bilinéaire) à discriminant non nul, en somme de deux formes quadratiques (ou bilinéaires).

Nous démontrons ensuite que le système d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre déjà indiqué, est complètement intégrable, faisant quelques remarques sur son intégration (connue pour $\eta = 2$).

Le troisième chapitre est lié aux relations d'incertitude de Heisenberg. Après justification du calcul d'expressions de la forme

$$\int x_i^{p_i} \psi_{n_i}^{\varphi}(x_i) \chi_{n_i}^{\varphi}(x_i) dx_i,$$

nous démontrons la relation

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2} + \frac{h^2}{4\pi^2} \sum_0^{\infty} n |\alpha_n|^2$$

valable toutes les fois que $\sum n |\alpha_n|^2 < \infty$, la fonction d'onde étant $\sum \alpha_n \psi_n(x)$. Puis, étendons la relation $\Delta p \Delta q \geq \frac{h}{4\pi}$ aux quadriques de dispersion.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DE MEHLER ET ÉQUATIONS INTÉGRALES.

$\varphi(x_i)$ est une forme quadratique définie > 0 des variables $x_1, x_2, \dots, x_r$,

$$\varphi(x_i) = \alpha_{ij} x_i x_j, \quad \psi(\xi_i) = \beta_{ij} \xi_i \xi_j$$

est la forme réciproque avec

$$\xi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \alpha_{ij} x_j \quad (x_i = \beta_{ij} \xi_j).$$

Remarque. — Les sommations par rapport à un indice écrit deux fois seront presque toujours sous-entendues; si une sommation ne doit pas avoir lieu, cela sera toujours écrit explicitement.

x désignera souvent l'ensemble des variables x_i , quand il n'y aura aucune ambiguïté (de même, $\gamma, \xi, \eta, \dots$).

Aux formes φ et ψ sont attachés les fonctions et polynômes suivants :

$$(1) \quad \gamma_1^\varphi(x_i, h_i) = e^{\varphi(x_i) - \varphi(x_i - h_i)} = \sum_0^\infty \left(\prod \frac{h_i^{n_i}}{n_i!} \right) H_{n_i}^\varphi(x_i) \\ = \gamma_2^\psi(x_i, k_i) = \sum_0^\infty \left(\prod \frac{k_i^{n_i}}{n_i!} \right) G_{n_i}^\psi(x_i),$$

avec

$$k_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial h_i}, \quad h_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial k_i}, \quad \gamma_2^\psi(x_i, k_i) = e^{\varphi(x_i) - \varphi\left(x_i - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial k_i}\right)}.$$

Dans la suite, nous n'écrirons plus le signe Π ; n_i désigne toujours l'ensemble $n_1, \dots, n_r$, et $\frac{h_i^{n_i}}{n_i!}$ le produit de ces r facteurs.

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n_i}(x_i) G_{n_j}(x_i) e^{-\varphi(x_i)} = a_{n_i}^2 \delta_{ij},$$

c'est-à-dire $= 0$ si les deux suites n_i et n_j ne sont pas identiques.

$\frac{H_{n_i}(x_i)}{a_{n_i}} = \mathcal{H}_{n_i}(x_i)$ s'appelle le polynôme normé, comme

$$\mathcal{G}_{n_i}(x_i) = \frac{G_{n_i}(x_i)}{a_{n_i}};$$

les $\psi_{n_i}^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} \mathcal{H}_{n_i}$ et $\chi_{n_i}^\psi = e^{-\frac{\psi}{2}} \mathcal{G}_{n_i}$ forment deux suites orthogonales l'une à l'autre sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, et normées (l'une par rapport à l'autre).

On a

$$(2) \quad \frac{1}{a_{n_i}^2} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2^{\frac{r}{2}}} \frac{1}{\prod r^{n_i} n_i!},$$

Δ est le déterminant $|\alpha_{ij}| > 0$ ($\Delta = \Delta_\varphi = \frac{1}{\Delta_\psi}$).

PASSAGE DE H^φ A G^ψ . — Remplaçant la forme φ par sa réciproque :

$$\gamma_1^\varphi(x_i, h_i) = e^{\psi(\xi_i) - \psi(\xi_i - h_i)} = e^{\psi(\xi_i) - \psi\left(\xi_i - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial h_i}\right)} = \gamma_2^\psi(\xi_i, h_i),$$

donc

$$(3) \quad \begin{cases} H_{n_i}^\varphi(x_i) = G_{n_i}^\psi(\xi_i), & \mathcal{H}_{n_i}^\varphi(x_i) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_\psi}} \mathcal{G}_{n_i}^\psi(\xi_i), \\ H_{n_i}^\psi(\xi_i) = G_{n_i}^\varphi(x_i), \end{cases}$$

ou, de même,

$$\psi_{n_i}^{\varphi}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{\psi}}} \chi_{n_i}^{\psi}(\xi_i).$$

Remarque. — On passe de H^{φ} à G^{φ} dans (1) en remplaçant h_i par k_i ; l'ensemble des termes de même degré total en h , $\sum_i n_i = \nu$ ne change alors pas, ou

$$\sum_{\sum n_i = \nu} \frac{h_i^{n_i}}{n_i!} H_{n_i}^{\varphi}(x) = \sum_{\sum n_i = \nu} \frac{k_i^{n_i}}{n_i!} G_{n_i}^{\varphi}(x),$$

d'où il résulte que $H_{n_i}^{\varphi}(x)$ est combinaison linéaire des $G_{n_i}^{\varphi}$ dont la somme des indices est la même, et réciproquement. Ainsi ψ_{n_i} est orthogonal à tout $\psi_{n'_i}$ avec $\sum_i n'_i \neq \sum_i n_i$. De même pour les χ . Ceci est lié aux propriétés des équations intégrales à noyaux symétriques (*cf.* plus loin), exposées par exemple dans Goursat (*Analyse*, t. III).

PLÉNITUDE DU SYSTÈME DES ψ_{n_i} . — La remarque précédente vaut aussi lorsqu'on fait sur les x une transformation linéaire, mais gardant invariante la forme φ .

Ramenons φ à ses axes :

$$\varphi'_i(x) = \varphi^0(X), \quad \gamma_1^{\varphi} = e^{\varphi(x_i) - \varphi(x_i - h_i)} = e^{\varphi^0(X_i) - \varphi^0(X_i - H_i)},$$

donc $H_{n_i}^{\varphi}(x)$ est combinaison linéaire des $H_{n_i}^{\varphi^0}(X)$ avec $\sum n'_i = \sum n_i$ et réciproquement.

Or, $\psi_{n_i}^{\varphi^0}(X)$ est le produit de ψ d'Hermite à une seule variable, et leur système est donc complet comme dans le cas d'une variable (*cf.*, par exemple, N. Wiener, *loc. citée*).

Soit alors $f(x)$ une fonction de carré sommable, continue par exemple, $f(x) = f^0(X)$ qui peut être approchée en moyenne d'aussi près que l'on veut par une combinaison linéaire de $\psi_{n_i}^{\varphi^0}(X)$, donc $f(x)$ par une autre combinaison de $\psi_{n_i}^{\varphi}(x)$ [dont les $\sum n_i$ ne dépassent pas les $\sum n'_i$ utilisés pour approcher $f^0(X)$].

Ceci suffit, d'après la définition même, pour démontrer que le système des $\psi_{n_i}^{\varphi}(x_i)$ est complet, ainsi que celui des $\chi_{n_i}^{\varphi}(x_i)$ qui lui est

orthogonal. Il est facile d'orthogonaliser une de ces suites, ce qui nous ramène aux χ^{φ} suivant des formules données dans le livre de MM. Appell et Kampé de Fériet.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — $\gamma_1^{\varphi} = e^{-\varphi(h_i) + 2h_i\zeta_i}$ est développable en série absolument convergente en h_i , dans tout l'espace des h_i , donc

$$h_i \frac{\partial \gamma}{\partial h_i} = [n_i \gamma] \quad (i \text{ est donné}),$$

$[n_i \gamma]$ désigne la série (1) dans laquelle chaque terme est multiplié par le n_i correspondant (pour un seul i donné à l'avance).

D'autre part, $\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta_i} = 2h_i \gamma$ est développable en série suivant les $h_i^{n_i}$ et cette série, comme γ est absolument et uniformément convergente dans tout domaine borné des x_i . On peut donc l'intégrer terme à terme, égaler les coefficients de $h_i^{n_i}$ avec le même coefficient dans γ_1^{φ} et en déduire

$$(4) \quad \frac{\partial H_{n_i+1}}{\partial \zeta_i} = 2(n_i+1) H_{n_i}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta_i} = \sum \frac{h_i^{n_i}}{n_i!} \frac{\partial H_{n_i}}{\partial \zeta_i};$$

de (1) on tire aussi

$$H_{n_i}(x_i) = e^{\zeta_i} (-1)^{n_i} \frac{\partial^{n_i}}{\partial x_i^{n_i}} e^{-\zeta_i - h_i^2},$$

d'où

$$(5) \quad \frac{\partial H_{n_i}}{\partial x_i} = 2\zeta_i H_{n_i} - H_{n_i+1}.$$

Dans toutes ces formules, comme dans celles qui suivront, seuls les indices explicitement écrits, valent n_i+1 , ceux non écrits ont les valeurs implicites faisant partie du groupe $(n_1, n_2, \dots, n_r)$.

On a alors

$$h_i \frac{\partial \gamma}{\partial h_i} = h_i \left(2\zeta_i + \frac{\partial \varphi}{\partial h_i} \right) \gamma = (2h_i\zeta_i + 2x_{ij}h_i h_j) \gamma$$

et comme

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta_i} &= 2h_i \gamma, & \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} &= 4h_i h_j \gamma, & x_{ij} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \zeta_i \partial x_i} - 2\zeta_i \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta_i} + 2[n_i \gamma] &= 0 & (i \text{ donné}) & & (\gamma_1^{\varphi}) \end{aligned}$$

qui est équivalente, car on peut dériver (1) terme à terme comme indiqué plus haut, à

$$\frac{\partial^2 H_{n_i}}{\partial x_i \partial \xi_i} - 2 \xi_i \frac{\partial H_{n_i}}{\partial \xi_i} + 2 n_i H_{n_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

donc r équations.

On en tire, pour $\Gamma_1^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} \gamma_1^\varphi$:

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} + \left(x_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} - \xi_i \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i} \right) - x_i \xi_i \Gamma + [(2n_i + 1) \Gamma] = 0 \quad (i \text{ donné}),$$

car

$$\begin{aligned} \gamma &= \Gamma e^{\frac{\varphi}{2}}, & \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i} &= \left(x_i \Gamma + \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i} \right) e^{\frac{\varphi}{2}}, \\ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} &= \left(\Gamma + x_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} + x_i \xi_i \Gamma + \xi_i \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i} \right) e^{\frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

On aurait, au contraire, pour γ_2^φ et $\Gamma_2^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} \gamma_2^\varphi$:

$$(6') \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} - 2 x_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + 2 [n_i \gamma] = 0 \quad (i \text{ donné}) \quad (\gamma_2^\varphi),$$

$$(7') \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} + \left(\xi_i \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i} - x_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right) - x_i \xi_i \Gamma + [(2n_i + 1) \Gamma] = 0 \quad (\Gamma_2^\varphi),$$

formules qui résument les équations auxquelles satisfont tous les H_n et G_{n_i} ainsi que les $e^{-\frac{\varphi}{2}} H_{n_i}$ et $e^{-\frac{\varphi}{2}} G_{n_i}$.

En sommant ces équations par rapport à i , avec $\sum n_i = \nu$, on a

$$(6'') \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} - 2 \xi_i \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i} + 2 [\nu \gamma] = 0 \quad (\gamma_1^\varphi \text{ et } \gamma_2^\varphi),$$

$$(7'') \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial \xi_i} - \varphi \Gamma + [(2\nu + 1) \Gamma] = 0 \quad (\Gamma_1^\varphi \text{ et } \Gamma_2^\varphi)$$

$$\left(\text{remarquer que } d\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_i} d\xi_i \text{ entraîne } x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right).$$

On remarquera le caractère invariant de ces équations dans un changement linéaire des x_i , et un changement des α_{ij} conservant la forme fondamentale φ , ce qui s'accorde avec l'invariance, déjà remarquée de la famille linéaire des H_n , $\sum n_i = \nu$, dans un tel changement.

A cause de cette invariance, l'équation d'onde d'un oscillateur à r dimensions avec force de rappel dépendant d'un potentiel « elliptique »

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - \alpha_{ij} x_i x_j] \psi = 0$$

ne peut être ramenée à ce type que si $\alpha_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, auquel cas les solutions choisies pour ψ en Mécanique ondulatoire sont les fonctions d'Hermite, mais dégénérées, avec séparation des variables.

Généralisation de la formule de Mehler.

CALCUL FORMEL. — Il s'agit de trouver les sommes de séries de la forme

$$\sum_0^\infty \Pi t_i^{n_i} \chi_{n_i}^\varphi(y_i) \psi_{n_i}^\varphi(x_i) = {}_{11}\mathbf{K}(x_i, y_i, t_i).$$

${}_{11}\mathbf{K}$ est le noyau d'une transformation intégrale

$$g(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}(x_i, y_i, t_i) f(y_i) dy_i$$

qui transforme

$$\psi_{n_i}^\varphi(x) \text{ en } t_i^{n_i} \psi_{n_i}^\varphi(x) \quad \text{ou} \quad \Gamma_1^\varphi(x_i, h_i) \text{ en } \Gamma_1^\varphi(x_i, h_i t_i).$$

Autrement dit, les ψ_{n_i} sont les fonctions propres de cet opérateur, solutions de l'équation intégrale homogène correspondante.

$${}_{11}\mathbf{L} = {}_{11}\mathbf{K} e^{\frac{\varphi(y_i) + \varphi(x_i)}{2}} \text{ transforme } \gamma_1^\varphi(x_i, t_i) \text{ en } \gamma_1^\varphi(x_i, h_i t_i).$$

Il y a seize noyaux de ce genre; mais, appelons E la transformation consistant à échanger φ et ψ ; e, celle échangeant x et y , T le remplacement de x par ξ qui transforme

$$(T) \quad \mathcal{G}\psi \text{ en } \sqrt{\Delta_\psi} \mathcal{H}\varphi \quad \text{et} \quad \mathcal{H}\psi \text{ en } \sqrt{\Delta_\psi} \mathcal{G}\varphi,$$

(T') remplaçant y par η .

Alors de

$$e^{\varphi(y)} {}_{11}\mathbf{L} = \sum t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^\varphi(y) \mathcal{H}_{n_i}^\varphi(x) \quad \text{et} \quad e^{\varphi(y)} {}_{21}\mathbf{L} = \sum t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^\varphi(y) \mathcal{G}_{n_i}^\varphi(x),$$

on déduit, respectivement par e et $ET^{-1}T'^{-1}$, les fonctions

$$e^{\varphi(\gamma)} {}_{22}L = \sum t_i^{\mu_i} \mathcal{H}_{n_i}^{\varphi}(\gamma) \mathcal{G}_{n_i}^{\varphi}(x) \quad \text{et} \quad e^{\varphi(\gamma)} {}_{12}L = \sum t_i^{\mu_i} \mathcal{H}_{n_i}^{\varphi}(\gamma) \mathcal{H}_{n_i}^{\varphi}(x).$$

Par E , de ces quatre-là, on déduit 1L , 2L , 3L , 4L .

Par T^{-1} , des quatre premiers, ceux (à l'ordre près) obtenus en remplaçant φ par ψ dans $\mathcal{H}^{\varphi}(x)$ ou $\mathcal{G}^{\varphi}(x)$.

Enfin, par e (ou E), de ces quatre derniers, les quatre restants (à savoir de 1L , 2L , 3L , 4L ; 2L , 3L , 4L , 1L ; 3L , par exemple; transformant γ_1^{φ} en γ_2^{ψ}).

On peut donc se réduire à la recherche formelle de ${}_{44}L$ et ${}_{21}L$.

Pour cela, utilisons les fonctions génératrices et la formule

$$\int {}_{11}L(x_i, y_i) e^{\varphi(\gamma_i) - \varphi(\gamma_i - h_i)} dy_i = e^{\varphi(x_i) - \varphi(x_i - h_i)}$$

(comme M. Norbert Wiener pour une variable).

Or L ne comprend pas les h_i . Cherchons pour $-\log L$ une expression forme quadratique des x_i, y_i, t_i :

$$\int L e^{-[\varphi(h_i) - \varphi(h_i t_i)] + 2h_i(\gamma_i - t_i \xi_i)} dy_i = 1 \quad \left(\gamma_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}, \quad \xi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right).$$

Soit $\zeta(x_i, t_i)$ la forme

$$\zeta = \alpha_{ij}(1 - t_i t_j) x_i x_j = \varphi(x_i) - \varphi(t_i x_i),$$

τ sa forme réciproque et

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial h_i}, \quad h_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \lambda_i};$$

l'exposant de e est

$$\begin{aligned} -\zeta(h_i, t_i) + 2h_i(\gamma_i - t_i \xi_i) &= -\tau(\lambda_i) + \frac{\partial \tau}{\partial \lambda_i}(\gamma_i - t_i \xi_i) \\ &= -\tau[\lambda_i - (\gamma_i - t_i \xi_i)] - \tau(\gamma_i - t_i \xi_i). \end{aligned}$$

L est donc de la forme $A e^{-\tau(\gamma_i - t_i \xi_i)}$, aux

$$A \int e^{-\tau[\lambda_i - (\gamma_i - t_i \xi_i)]} d\eta_i = \Delta_{\varphi}, \quad \text{car} \quad dy_1 \dots dy_r = d\eta_1 \dots d\eta_r \frac{1}{\Delta}.$$

Comme $\int e^{-\tau(\eta_i)} d\eta_i = \frac{\pi^2}{\sqrt{\Delta_\tau}}$,

$$A = \frac{\Delta_\varphi}{\pi^2 \sqrt{\Delta_\tau}} \quad (A \text{ dépendant des } t_i),$$

tandis que

$$\int {}_{21}L(x_i, y_i, t_i) e^{-\varphi(h_i) + 2h_i\eta_i} dy_i = e^{-\psi(h_i t_i) + 2x_i h_i t_i},$$

d'où, formellement

$$(8) \quad {}_{11}L = \frac{\Delta_\varphi}{\pi^2 \sqrt{\Delta_\tau}} e^{-\tau(\eta_i - t_i \xi_i)}, \quad {}_{21}L = \frac{\Delta}{\pi^2 \sqrt{\Delta_{\tau'}}} e^{-\tau'(\eta_i - t_i \xi_i)};$$

τ et τ' sont les formes réciproques respectivement de

$$\zeta = \varphi(x_i) - \varphi(x_i t_i) \quad \text{et} \quad \zeta' = \varphi(x_i) - \psi(x_i t_i).$$

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AUXQUELLES SATISFONT CES NOYAUX. —
Posons $Z_{n_i} = t_i^{n_i} \mathcal{C}_{n_i}$. Comme

$$2 t_i \frac{\partial z_{n_i}}{\partial t_i} = 2 n_i \mathcal{C}_{n_i} \quad (i \text{ donné}),$$

(6) devient

$$(6_a) \quad \frac{\partial^2 z_{n_i}}{\partial x_i \partial \xi_i} - 2 \xi_i \frac{\partial z_{n_i}}{\partial \xi_i} + 2 t_i \frac{\partial z_{n_i}}{\partial t_i} = 0, \quad \text{donc} \quad {}_{11}L = \Sigma \mathcal{G}_{n_i}(y_i) z_{n_i}(x_i)$$

doit vérifier la même équation.

Si l'on écrit

$${}_{11}L = \frac{\Delta_\varphi}{\pi^2 \sqrt{\Delta_\tau}} e^{-\tau(u)} \quad (u_i = \eta_i - t_i \xi_i),$$

la nouvelle dérivée par rapport à t_i (provenant simplement du terme Δ_τ et de la forme τ) vaut

$$\frac{\partial {}_{11}L}{\partial t_i} + \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial \xi_i} = -t_i \frac{\partial z}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = t_i t_j \frac{\partial^2 z}{\partial u_i \partial u_j};$$

l'équation (6_a) devient

$$(9) \quad \alpha_{ij} t_j \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} + 2 \frac{\partial L}{\partial t_i} = 0 \quad [i \text{ donné}; L(u_i, t_i)].$$

Vérifions-le par un calcul direct sur ${}_{11}L(u_i, t_i)$,

$$L = \frac{1}{\sqrt{\Delta_\zeta}} e^{-\tau(u_i)} \quad \text{à un facteur constant près.}$$

Calculons $\frac{\partial \Delta_\zeta}{\partial t_i}$, en dérivant successivement chaque ligne et en appelant $\tau_{ij} \Delta_\zeta$ les mineurs (les τ_{ij} sont les coefficients de la forme τ).

La $j^{\text{ième}}$ ligne donne

$$\frac{\partial}{\partial t_i} x_{i+1} \dots t_i t_j \Delta_\zeta \tau_{ij} = -x_{ij} t_j \Delta_\zeta \tau_{ij} \quad (j \neq i);$$

La $j^{\text{ième}}$ ligne

$$-x_{ij} t_j \Delta_\zeta \tau_{ij} \quad (j \neq i) \quad \text{et} \quad -2\alpha_{ii} t_i \Delta_\zeta \tau_{ii} \quad (j = i);$$

soit en tout

$$t_i \frac{\partial \Delta_\zeta}{\partial t_i} = -2x_{ij} t_i t_j \tau_{ij} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{L} t_i \frac{\partial L}{\partial t_i} = \alpha_{ij} t_i t_j \tau_{ij} - t_i \frac{\partial \tau}{\partial t_i}.$$

Il faut encore $\frac{\partial \tau}{\partial t_i}$; or, considérant les x_i comme indépendants de t_i , $\zeta(x_i) = \tau(u_i)$,

$$\frac{\partial \tau}{\partial t_i} = -2\alpha_{ij} t_j x_i x_j = \frac{\partial \tau}{\partial t_i} + \frac{\partial \tau}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial t_i} = \frac{\partial \tau}{\partial t_i} + 2x_j \frac{\partial u_j}{\partial t_i}$$

et

$$\frac{\partial u_j}{\partial t_i} = -\alpha_{ij} t_j x_i \quad (j \neq i)$$

et

$$-\alpha_{ik} x_k t_k - 2\alpha_{ii} x_i t_i \quad (k \neq i) \quad \text{pour} \quad \frac{\partial u_j}{\partial t_i},$$

d'où

$$t_i \frac{\partial \tau}{\partial u_i} = t_i \frac{\partial \tau}{\partial t_i} + 4x_{ij} t_i t_j x_i x_j = 2x_{ij} t_i t_j x_i x_j$$

ou

$$\frac{1}{L} t_i \frac{\partial L}{\partial t_i} = \alpha_{ij} t_i t_j (\tau_{ij} - 2x_i x_j) \quad (i \text{ donné}).$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial u_i} &= -2x_i, & \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} &= -2\tau_{ij} + 4x_i x_j, \\ & & \alpha_{ij} t_j \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} + 2 \frac{\partial L}{\partial t_i} &= 0, \end{aligned}$$

ce que nous voulions démontrer.

JUSTIFICATION DES FORMULES. — C'est-à-dire du développement de ${}_{11}\mathbf{L}$ en $t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^{\varphi}(\gamma) \partial \mathcal{E}_{n_i}^{\varphi}(x)$.

Nous partons de

$$\int {}_{11}\mathbf{L} e^{\varphi(\gamma_i) - \varphi(\gamma_i - h_i)} d\gamma_i = e^{\varphi(\gamma_i) - \varphi(\gamma_i - h_i t_i)}$$

que nous pouvons dériver sous le signe $\int$, par rapport à h_i , sous condition que la dérivée soit absolument et uniformément convergente dans un certain domaine des h_i .

Or, l'exposant de e , sous le signe $\int$ est $-\tau(\eta_i - t_i \xi_i) - \varphi(h_i) + 2h_i \eta_i$, qu'il est facile de majorer pour η_i assez grand et les h_i, t_i , assez petits, par exemple

$$|\eta_i - t_i \xi_i| > \frac{|\eta_i|}{2}, \quad \text{soit} \quad h_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t_i), \quad -\tau\left(\frac{|\eta_i|}{2} - 2t_i\right) + \tau(2t_i),$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial h_i} \int {}_{11}\mathbf{L} e^{\varphi(\gamma_i) - \varphi(\gamma_i - h_i)} d\gamma_i \quad \text{majoré par} \quad K \int 2|\eta_i| e^{-\tau\left(\frac{|\eta_i|}{2} - 2t_i\right)} d\gamma_i.$$

Une telle majoration vaudra pour une dérivation quelconque $\frac{\partial^r}{\partial h_i^{n_i}}$, puis faisant $h_1 = \dots = h_r = 0$,

$$\int {}_{11}\mathbf{L}(x_i, \gamma_i, t_i) \partial \mathcal{E}_{n_i}(\gamma_i) d\gamma_i = t_i^{n_i} \partial \mathcal{E}_{n_i}(x_i)$$

qui vaut dans tous les cas où la forme τ est définie positive.

Les fonctions propres de l'équation intégrale homogène de noyau ${}_{11}\mathbf{L}$ sont donc les $\partial \mathcal{E}_{n_i}$. Pour x_i fixe, ${}_{11}\mathbf{K}$, continue et de carré sommable (en γ_i) égale son développement suivant le système des $\chi_{n_i}(\gamma_i)$; et le coefficient de $\chi_{n_i}(\gamma_i)$ est, d'après ce qui vient d'être vu, $t_i^{n_i} \psi_{n_i}(x_i)$.

Rappelons que

$${}_{11}\mathbf{K} = e^{-\frac{\varphi(\gamma_i t_i)}{2}} e^{\frac{\varphi(\gamma_i)}{2}} \cdot \tau(\gamma_i - t_i \xi_i)$$

à un coefficient près; et la formule de Mehler se prolonge dans tout le domaine des $|t_i|$ où ${}_{11}\mathbf{K}$ admet un développement absolument convergent, c'est-à-dire $\Delta_i > 0$.

M. Wiener, pour une variable, n'emploie pas un tel argument et

étudie directement le développement du noyau $_{11}L$ par une méthode plus longue et difficile à généraliser.

Notons aussi que les théorèmes généraux de Hilbert ne s'appliquent pas à un noyau qui, comme $_{11}L$, n'est pas de carré doublement sommable (par rapport aux x_i et aux y_i).

MÉTHODE DE M^{me} LEBEDEFÉ ET THÉORÈMES DE DÉVELOPPEMENT (*loc. citée*). — Rappelons le principe de la méthode classique de Hilbert⁽⁷⁾, Schmidt pour établir des théorèmes de développement d'une fonction suivant la suite orthogonale ψ_i .

Les ψ sont solutions de l'équation du type de Sturm-Liouville

$$(a) \quad \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + [q(x) + \lambda u] = 0$$

avec des conditions limites (pour $x=0$, $x=l$) homogènes, et pour les valeurs propres $\lambda = \lambda_i$. Appelons $\mathcal{L}u$ le premier membre de (a) pour $\lambda = 0$; si $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre, la solution de

$$(b) \quad \mathcal{L}(u) = \varphi(x)$$

est

$$(c) \quad u = \int_0^l K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

$K(x, \xi)$ est la fonction de Green, solution de $\mathcal{L}K = 0$ à la fois par rapport à x et ξ , satisfaisant aux conditions limites imposées, mais dont la dérivée admet la discontinuité $-\frac{1}{p(\xi)}$ pour $x = \xi$ ($\mathcal{L}K = 0$ n'étant pas satisfaite en ce point).

C'est la relation (c), jointe à (b) qui sert de base aux théorèmes de développement, mais n'est applicable que si la fonction de Green existe. Si non, il faut trouver par une autre méthode le noyau K ; c'est ce que fait W. Lebedeff appliquant la formule de Green

$$\iint_v [\nu \mathcal{L}(u) - u \mathcal{L}'(\nu)] = \int_s \left(\nu \frac{du}{dx} - u \frac{d\nu}{dx} \right) dt + u\nu dx$$

(7) COURANT und HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, Bd. 1, V, § 14.

à u et v telles que $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}'(v) = 0$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ étant les deux opérateurs adjoints

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Les u sont des fonctions de x et t liées de près aux polynômes d'Hermite et v , soumise à certaines conditions limites fournira le noyau cherché. Nous allons utiliser la même méthode, généralisée à n variables, et connaissant déjà le noyau, pour justifier une deuxième fois les propriétés de nos noyaux $L(x_i, y_i, t_i)$, et obtenir de nouvelles formules.

Introduisons des τ_i pour homogénéiser l'expression de τ et L :

$${}_1L = \frac{\Delta_\varphi}{\pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\Delta_\varphi}} e^{-\tau(\tau_i \eta_i - t_i \zeta_i)},$$

avec

$$\zeta = \alpha_{ij}(\tau_i \tau_j - t_i t_j) x_i x_j \quad (\tau \text{ forme réciproque de } \zeta),$$

${}_1L(u_i, \tau_i, t_i)$ satisfait aux équations, déduites de (9),

$$(9') \quad \alpha_{ij} \tau_j \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} - 2 \frac{\partial L}{\partial \tau_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r; u_i = \tau_i \eta_i - t_i \zeta_i),$$

système d'équations adjoint à (9) (les τ_j remplaçant les t_j).

Appliquons la formule de Green, avec ces deux systèmes d'opérateurs adjoints :

$$\mathcal{L}_i = \alpha_{ij} \tau_j \frac{\partial^2}{\partial \eta'_i \partial \eta'_j} + 2 \frac{\partial}{\partial \tau_i}, \quad \mathcal{L}'_i = \alpha_{ij} \tau_j \frac{\partial^2}{\partial \eta'_i \partial \eta'_j} - 2 \frac{\partial}{\partial \tau_i}$$

à la fonction $L(\eta'_i, \tau_j)$ d'une part, et à des fonctions $f(\eta'_i, \tau_j)$ satisfaisant à (9)

$$(9) \quad \alpha_{ij} \tau_j \frac{\partial^2 f}{\partial \eta'_i \partial \eta'_j} + 2 \frac{\partial f}{\partial \tau_i} = 0;$$

pour f nous pouvons prendre les $\tau_i^{n_i} \mathcal{H}_{n_i}(y_i)$ exprimées en $\eta'_i = \tau_i \eta_i$ ou y'_i (définies par $\eta'_i = \alpha_{ij} y'_j$), car (6a) devient (9) par un tel changement de variables.

(9) est donc aussi satisfaite par

$$\gamma_1^\varphi = e^{-\varphi(h_i \tau_i) + 2 h_i \tau_i^{\frac{1}{2}}},$$

Nous intégrons dans le volume v à $r+1$ dimensions limité par

$$\eta'_{ij} = \eta'^{i,0}_{ij}, \quad \tau_i = \tau^0_i \quad \text{ou} \quad \tau^1_i.$$

Il suffit d'intégrer par parties, par rapport à η'_i et τ_i pour le premier terme du premier membre et η'_i et τ_i pour le deuxième pour obtenir

$$\int_v [f \mathcal{C}_i L - L \mathcal{C}_i f] d\eta'_i d\tau_i = \int_s f \alpha_{ij} \tau_i \frac{\partial L}{\partial \eta'_i} \frac{d\eta'_1 \dots d\eta'_r}{d\eta'_i} d\tau_i \\ - \int_s L \alpha_{ij} \tau_j \frac{\partial f}{\partial \eta'_i} \frac{d\eta'_1 \dots d\eta'_r}{d\eta'_j} d\tau_i - \int_s f L d\eta'_j;$$

j doit être sommé de 1 à r , une intégrale sur s n'est étendue qu'à deux faces opposées de s . Il reste finalement, si nous faisons tendre les $\eta'^{i,0}_{ij}$ vers l'infini, vu la forme de L :

$$\int_{\tau_i=\tau^1_i} f L d\eta'_j = \int_{\tau_i=\tau^0_i} f L d\eta'_j \quad \text{qui vaut pour tout } i,$$

où, $\int \tau_1 \dots \tau_r L f dy_j$ est indépendant de τ . On peut prendre L égal à $\frac{\Delta \varphi}{\pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\Delta^2}} e^{-\tau(\tau_i \eta_i - t_i \xi_i)}$; tout ceci vaut tant que τ est une forme définie > 0 .

Posons $\tau_i = \lambda t_i$, λ tendant vers 1 par valeurs supérieures. On a

$$\zeta(x') = (\lambda^2 - 1) x_{ij} t_i t_j x_i x_j = (\lambda^2 - 1) \zeta'$$

et $\tau(u) = \frac{\tau'(u)}{\lambda^2 - 1}$ devient infinie quand $\lambda \rightarrow 1$, mais reste toujours définie > 0 .

On a

$$u_i = t_i(\lambda \eta_i - \xi_i) = \eta'_i - t_i \xi_i.$$

Recherchons la limite de

$$\tau_1 \dots \tau_r \int L f dy_j = \frac{1}{\pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\lambda^2 - 1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau'(u)(\lambda \eta_i - \tau_j \xi_j)}{\lambda^2 - 1}} f d\eta'_j \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 1.$$

Pour vérifier que c'est $f(x_i, t_i)$, ramenons τ' à ses axes

$$\tau'(u_i) = \sum_1^r (u_i^0)^2, \quad u_i = \partial_{ij} u_j^0, \quad u_i^0 = \partial'_{ij} u_j = \lambda \eta_i^0 - \xi_i^0,$$

soit

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum \frac{(\lambda \eta_i^0 - \xi_i^0)^2}{\lambda^2 - 1}} f \frac{D(u_i)}{D(u_i^0)} \frac{du_i^0}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = f(x_i, t_i),$$

car

$$u_i^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau'}{\partial u_j} \delta_{ij} \quad \text{entraîne} \quad \frac{D(u_i^0)}{D(u_i)} = \Delta \tau' \frac{D(u_i)}{D(u_i^0)} \bullet$$

et l'intégration se sépare en r intégrations par rapport à une variable; et la formule se réduit à

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \int e^{-u^2} f(x + \sqrt{\lambda^2 - 1} u) du = \sqrt{\pi} f(x).$$

Faisant $\tau_i = 1$, nous démontrons ainsi à nouveau que les $\mathcal{H}_{n_i}(x_i)$ sont fonctions propres pour la valeur propre $\lambda = \Pi t_i^{n_i}$.

Nous voyons que les noyaux trouvés ici ne sont autres que les noyaux de la forme $e^{-(y-x)^2}$, singuliers, généralisés au cas de r variables.

PROPRIÉTÉS DE DÉVELOPPEMENT. — Sur la base de relations généralisant (b) et (c) au cas où la variable t intervient dans u , φ et $\mathcal{L}$, M^{mo} Lebedeff obtient le théorème suivant :

Toute fonction $f(x)$ continue ainsi que ses deux premières dérivées, sur $-\infty, +\infty$, telle que

$$\Delta f = f''(x) + (1 - x^2)f(x)$$

soit, ainsi que son carré, sommable sur $(-\infty, +\infty)$ est développable en une série absolument et uniformément convergente sur $(-\infty, +\infty)$ suivant les $\psi_n(x)$ d'Hermite.

Il est facile de passer de là à un théorème semblable, relatif à l'uniformité du développement, pour r variables. Nous le ferons pour $r = 2$.

Supposant $\Delta_y f(x, y)$ sommable ainsi que son carré, $f(x, y)$ est approchable d'aussi près que voulu par $\sum_1^N \alpha_n(x) \psi_n(y)$, à ε près, et uniformément par rapport à y dans $(-\infty, +\infty)$.

$$\alpha_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \psi_n(y) dy$$

est dérivable sous le signe $\int$ si, par exemple, f et ses dérivées des deux premiers ordres sont bornées et

$$\mathbf{A} \alpha_n(x) = \int \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + (1 - x^2) f(x, y) \right] \psi_n(y) dy.$$

Si donc $\int \mathbf{A}_x f(x, y) dx$ et $\int [\mathbf{A}_x f(x, y)]^2 dx$ existent et tendent, pour $y \rightarrow \infty$, vers l'infini comme y^k , k étant fini, le théorème de développement s'applique pour chaque $\alpha_n(x)$

$$(d) \quad \left| \alpha_n(x) - \sum_1^{P_n} \alpha_{mn} \psi_m(x) \right| \leq \gamma,$$

et M_n étant la borne supérieure de ψ_n sur $(-\infty, +\infty)$,

$$\left| f(x, y) - \sum_{n=1}^N \sum_1^{P_n} \alpha_{mn} \psi_m(x) \psi_n(y) \right| \leq \varepsilon + \eta \sum_1^N M_n,$$

quels que soient x et y .

Choissant N assez grand, puis les P_n assez grands pour satisfaire à (d), avec η arbitrairement petit, $f(x, y)$ peut ainsi être développée en série uniformément convergente suivant les $\psi_m(x) \psi_n(y)$; il en est donc de même quand on remplace les $\psi_m(x) \psi_n(y)$ par les $\psi_{m,n}^{\varphi}$ relatifs à la forme quadratique $\varphi(x, y)$, pour les mêmes raisons que celles invoquées à propos de la plénitude du système des ψ_{n_i} (p. 5).

D'une façon générale, il faut supposer que

$$\int \mathbf{A}_{x_i} f(x_1, \dots, x_r) dx_i \quad \text{et} \quad \int [\mathbf{A}_{x_i} f(x_1, \dots, x_r)]^2 dx_i$$

n'augmentent pas quand $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r$ tendent vers l'infini, plus vite qu'un polynôme déterminé par rapport à ces variables.

AUTRES MÉTHODES. — Loschmieder a utilisé, pour $r = 2$, l'expression intégrale des H_{mn} , sous forme d'une intégrale double

$$H_{mn} = \frac{(-i)^{m+n}}{2\pi\sqrt{\Delta}} e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\psi(u,v) + i(xu+yv)} u^m v^n du dv.$$

Erdélyi procède directement, à partir des fonctions génératrices et à l'aide de formules donnant $\Sigma a_n b_n z^n$ en fonction de $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma b_n z^n$ et obtient la formule

$$\sum \frac{t_i^{n_i}}{n_i!} H_{n_i}(\gamma) H_{n_i}(x) = \frac{1}{\Pi t_i \sqrt{\Delta'_1 \Delta'_2}} e^{\frac{\psi'_1(\xi' + \eta') - \psi'_2(\psi' - \eta')}{2}},$$

avec

$$\sum \frac{h_i^{n_i}}{n_i!} H_{n_i}(x) = e^{-\frac{\varphi'(h_i)}{2} + \frac{1}{2} h_i \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i}}, \quad \xi' = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i},$$

ψ'_1 en ψ'_2 étant les formes réciproques de

$$\varphi'_1 = \frac{x_i^2}{t'_i} + \varphi', \quad \varphi'_2 = \frac{x_i^2}{t'_i} - \varphi'$$

de déterminants Δ'_1 et Δ'_2 .

Posons $\varphi' = 2\varphi$, $t'_i = \frac{t_i}{2}$; les $H_{n_i}(x)$ sont alors les $H_{n_i}^{\varphi}(x)$ avec nos notations et il vient

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= 2\varphi_1, & \psi'_1 &= \frac{1}{2}\psi_1, & \xi' &= 2\xi; \\ \psi'_1(\xi') &= 2\psi_1(\xi), \\ \sum \frac{\left(\frac{t_i}{2}\right)^{n_i}}{n_i!} H_{n_i}(\gamma) H_{n_i}(x) &= \frac{1}{\Pi t_i \sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} e^{\frac{\psi_1(\xi - \eta) - \psi_2(\xi - \eta)}{2}}, \end{aligned}$$

tandis que nous avons obtenu

$$\Sigma t_i^{n_i} \mathcal{H}_{n_i}(\gamma) \mathcal{H}_{n_i}(x) = \Sigma \pi^{\frac{r}{2}} \frac{\sqrt{\Delta}}{n_i!} \left(\frac{t_i}{2}\right)^{n_i} H_{n_i}(\gamma) H_{n_i}(x) = e^{\varphi(\gamma)} {}_{12}\mathbf{L}$$

et

$$e^{\varphi(\gamma)} {}_{11}\mathbf{L} = \frac{\Delta e^{\varphi(\gamma)}}{\pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\Delta_{\gamma}}} e^{-\tau'(\eta_i - t_i x_i)}.$$

Par la transformation T et le changement de φ en ψ , on en déduit ${}_{12}\mathbf{L}$:

$$\Sigma t_i^{n_i} \mathcal{H}_{n_i}^{\varphi}(\gamma) \mathcal{H}_{n_i}^{\varphi}(x) = \Delta \Sigma t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^{\psi}(\eta) \mathcal{G}_{n_i}^{\psi}(\xi) = \frac{\Delta e^{\varphi(\gamma)}}{\Delta \pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\Delta_{\xi}}} e^{-\tau(\gamma, -t_i \xi_i)},$$

donc

$$\sum \left(\frac{t_i}{2}\right)^{n_i} \frac{1}{n_i!} H_{n_i}(\gamma) H_{n_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta \Delta_2}} e^{-\tau(\gamma_i - t_i \xi_i + \frac{1}{2} \gamma_i^2)},$$

τ étant réciproque de $\zeta = \psi(x_i) - \varphi(t_i x_i)$.

On vérifie bien que

$$t_1^2 \dots t_r^2 \Delta_1 \Delta_2 = \Delta \Delta_\zeta,$$

car, soit A l'opérateur

$$Ax = \zeta \quad (\varphi(x) = (x, Ax))$$

et t l'opérateur

$$t(x_i) = (t_i x_i),$$

alors $t_1, \dots, t_r, \Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_\zeta$ sont respectivement les déterminants des transformations linéaires :

$$t, A, \frac{1}{t} + A, \frac{1}{t} - A, \quad A^{-1} - tAt = A^{-1} \left(A + \frac{1}{t} \right) t \left(-A + \frac{1}{t} \right) t,$$

donc

$$\Delta_\zeta = \frac{1}{\Delta} \Delta_1 \Delta_2 t_1^2 \dots t_r^2.$$

Vérifions aussi que

$$-\tau(\gamma_i - t_i \xi_i) = \frac{1}{2} [\psi_i(\zeta + \eta) - \psi_i(\zeta - \eta) - \varphi(\gamma)],$$

le premier membre s'écrit

$$-(\gamma_i - t_i \xi_i) u_i, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial u_i} = \gamma_i - t_i \xi_i,$$

le deuxième

$$\frac{1}{2} [(x'_i + y'_i)(\xi_i + \eta_i) - (x''_i - y''_i)(\xi_i - \eta_i) - 2y_i \eta_i],$$

avec

$$\begin{aligned} \left(-A + \frac{1}{t} \right) x' &= Ax, & \left(-A + \frac{1}{t} \right) y' &= Ay; \\ \left(-A + \frac{1}{t} \right) x'' &= Ax, & \left(-A + \frac{1}{t} \right) y'' &= Ay. \end{aligned}$$

soit

$$\frac{\xi_i}{2} (x'_i - x''_i + y'_i + y''_i) + \eta_i \left[\left(\frac{x'_i + x''_i}{2} - \frac{y'_i - y''_i}{2} \right) - \gamma_i \right]$$

qui, compte tenu de

$$\left(y, A \frac{x' + x''}{2}\right) = \left(\gamma, \frac{x' + x''}{2}\right)$$

et

$$A \frac{x' + x''}{2} = -\frac{1}{t} \left(\frac{x' - x''}{2}\right), \quad A \left(\frac{y' - y''}{2} - y\right) = -\frac{1}{t} \left(\frac{y' + y''}{2}\right),$$

devient

$$-(y_t - t_i \zeta_i) \left(\frac{x' - x'' + y' + y''}{2t}\right).$$

Il suffit finalement de vérifier que

$$(A^{-1} - t A t) \left(\frac{x' - x'' + y' + y''}{2t}\right) = y - t \zeta,$$

or c'est

$$\begin{aligned} A^{-1} \left(\frac{x' - x'' + y' + y''}{2t}\right) - t A \left(\frac{x' - x'' + y' + y''}{2}\right) \\ = -\frac{x' + x''}{2} - \left(\frac{y' - y''}{2} - y\right) + \frac{x' + x''}{2} - t A x + \frac{y' - y''}{2} = y - t \zeta. \end{aligned}$$

La forme que nous utilisons a l'avantage de montrer que le noyau ne dépend en réalité que de r variables et non de $2r$. Par contre, il y aura avantage à définir le domaine des $|t_i|$ où nos formules de développement sont valables comme celui où φ_2 est défini > 0 plutôt que celui où ζ l'est; ces domaines sont identiques mais la forme φ_2 est définie beaucoup plus simplement.

CAS PARTICULIERS. — Faisons $t_1 = t_2 = \dots = t_r = t$, alors

$${}_{11}K = e^{\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{2}} {}_{11}L = \frac{\sqrt{\Delta}}{[\pi(1-t^2)]^2} e^{\frac{4t\varphi(x,y) - (1+t^2)[\varphi(x) + \varphi(y)]}{2(1-t^2)}} = \sum t^{2n_i} \chi_{n_i}(y) \psi_{n_i}(x).$$

Il est symétrique, donc admet aussi bien les ψ_{n_i} que les χ_{n_i} comme fonctions propres. Ceci illustre les propositions classiques sur la décomposition des noyaux symétriques (Cf. GOURSAT, t. III du *Cours d'Analyse*).

Pour obtenir la transformation de Fourier, prenons

$$\sum t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^{\varphi}(y) \mathcal{G}_{n_i}^{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum t_i^{n_i} \mathcal{G}_{n_i}^{\varphi}(y) \mathcal{H}_{n_i}^{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{\varphi(y)} {}_{11}\mathbf{L},$$

remplaçant ξ par x , on a donc

$$\sum t_i^{n_i} e^{\frac{-\varphi(y) + \psi(x)}{2}} \chi_{n_i}^{\varphi}(y) \chi_{n_i}^{\psi}(x) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi^{\frac{r}{2}} \sqrt{\Delta_{\zeta}}} e^{-\tau_i \varphi_i - t_i \psi_i}.$$

Faisons $t_1 = \dots = t_r = t$,

$$\tau_i(x_i - tx_i) = \frac{\psi(x_i - tx_i)}{1 - t^2} = \frac{\psi(x_i) - 2tx_i y_i + t^2 \psi(x)}{1 - t^2},$$

$$\sum t^r \chi_{n_i}^{\varphi}(y) \chi_{n_i}^{\psi}(x) = \frac{1}{(\pi(1 - t^2))^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{2tx_i y_i}{1 - t^2} - \frac{1 + t^2}{2(1 - t^2)}(\varphi(y) + \psi(x))};$$

pour $t = i$ c'est, formellement, la transformation de Fourier et

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{r}{2}}} \int e^{i\tau_i y_i} \chi_{n_i}^{\varphi}(y_i) = \chi_{n_i}^{\psi}(x_i),$$

la justification donnée plus haut étant toujours valable, mais le développement en série multiple absolument convergente ne vaut plus.

Ajoutons enfin que dans le domaine des $|t_i|$ où ζ est une forme définie > 0 , vaut une relation d'itération

$$\int \dots \int {}_{11}\mathbf{L}(x_i, y_i, \tau_i', t_i') {}_{11}\mathbf{L}(y_i, z_i, \tau_i, t_i) dy_i = {}_{11}\mathbf{L}(x_i, z_i, \tau_i \tau_i', t_i t_i'),$$

il suffit de développer ${}_{11}\mathbf{L}(y_i, z_i, \tau_i, t_i)$ et d'intégrer terme à terme pour obtenir le deuxième membre.

CHAPITRE II.

LIMITATION DU MODULE DES FONCTIONS D'HERMITE ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Nous voulons tout d'abord généraliser les relations

$$\frac{d}{dx} [(\psi_n^2 + \psi_{n-1}^2) e^{-x^2}] = 4x e^{-x^2} \psi_{n-1}^2 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} [(\psi_n^2 - \psi_{n-1}^2) e^{-x^2}] = -4x e^{-x^2} \psi_n^2$$

à partir desquelles Iyengar obtient $\psi_n^2(x) < \frac{k e^{x^2}}{\sqrt{n+1}}$ valable pour tout n et tout x .

De (1), (4) et (5), nous tirons

$$\frac{\partial \Pi_{n_i}^2}{\partial x_i} = 4\tilde{\zeta}_i \Pi_{n_i}^2 - \frac{1}{2(n_i+1)} \frac{\partial \Pi_{n_i+1}^2}{\partial \tilde{\zeta}_i};$$

or

$$\mathcal{H} = \frac{\Pi}{a}, \quad \frac{\partial \Pi_{n_i+1}^2}{\partial \tilde{\zeta}_i} = 2(n_i+1),$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} 4\tilde{\zeta}_i \mathcal{H}_{n_i}^2 = \frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}_i} \mathcal{H}_{n_i+1}^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}_{n_i}^2 & (i \text{ donné}), \\ -4x_i f_{n_i}^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} f_{n_i+1}^2 + \frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}_i} f_{n_i}^2 & (f_{n_i} = e^{-\varphi} \mathcal{H}_{n_i}), \end{cases}$$

car

$$\begin{aligned} e^{-2\varphi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}_i} e^{2\varphi} f_{n_i+1}^2 &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}_i} f_{n_i+1}^2 + 4x_i f_{n_i+1}^2, \\ e^{-2\varphi} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{2\varphi} f_{n_i}^2 &= \frac{\partial}{\partial x_i} f_{n_i}^2 + 4\tilde{\zeta}_i f_{n_i}^2. \end{aligned}$$

Les formules (1) sont liées aux formules de récurrence suivantes, connues

$$(1') \quad \begin{cases} \Pi_{n_i+1} - 2\tilde{\zeta}_i \Pi_{n_i} - 2n_i x_{ik} \Pi_{n_i+1} = 0, \\ \beta_{ik} \Pi_{n_k+1} - 2x_i \Pi_{n_i} + 2n_i \Pi_{n_i-1} = 0. \end{cases}$$

Cherchons des formules analogues à (1), mais portant sur les produits $\mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i}$; de même que (4) et (5) du chapitre I, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}_{n_i+1}(x)}{\partial x_i} &= 2(n_i+1) \mathcal{G}_{n_i}(x) \quad \text{ou} \quad \mathcal{H}_{n_i} \frac{\partial \mathcal{G}_{n_i+1}}{\partial x_i} = \mathcal{G}_{n_i} \mathcal{H}_{n_i}, \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{n_i}(x)}{\partial \tilde{\zeta}_i} &= 2x_i \mathcal{G}_{n_i}(x) - \mathcal{G}_{n_i+1}(x) \end{aligned}$$

et les relation de récurrence

$$(2') \quad \begin{cases} \mathcal{G}_{n_i+1} - 2x_i \mathcal{G}_{n_i} + 2n_i \beta_{ik} \mathcal{G}_{n_k-1} = 0, \\ x_{ik} \mathcal{G}_{n_k+1} - 2\tilde{\zeta}_i \mathcal{G}_{n_i} + 2n_i \mathcal{G}_{n_i-1} = 0, \end{cases}$$

qu'on peut déduire directement de (2).

De (4), (5) et des analogues, on tire

$$2 \xi_i \mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} = \mathcal{G}_{n_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}_{n_i} + \mathcal{H}_{n_i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{G}_{n_i+1},$$

$$2 x_i \mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} = \mathcal{H}_{n_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathcal{G}_{n_i} + \mathcal{G}_{n_i+1} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathcal{H}_{n_i+1}$$

ou

$$2 \xi_i \mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} = \mathcal{H}_{n_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{G}_{n_i} + \mathcal{G}_{n_i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}_{n_i+1},$$

donc

$$(2) \quad \begin{cases} 4 \xi_i \mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} + \mathcal{H}_{n_i+1} \mathcal{G}_{n_i+1}), \\ 4 x_i \mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\mathcal{H}_{n_i} \mathcal{G}_{n_i} + \mathcal{H}_{n_i+1} \mathcal{G}_{n_i+1}). \end{cases}$$

Nous devons nous servir du deuxième groupe d'équations (1) pour arriver à une relation de la forme

$$d[\quad] = -T \quad (T \geq 0),$$

le crochet étant une combinaison à coefficients positifs de $f_{n_i}^2$.

Il est difficile *a priori* de savoir entre quelles équations procéder à l'élimination pour obtenir cette formule; pour $n = 3$, on peut trouver huit des équations (1), dont les premiers membres sont linéairement dépendants par rapport aux huit inconnues en $\frac{\partial}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \xi}$. d'où une relation entre les f^2 et leurs $\frac{\partial}{\partial \xi}$ qui en sommant par rapport à ξ , η , ζ , nous a conduit à la formule cherchée.

Il nous faut tout d'abord démontrer :

LEMME. — *Toute forme quadratique à r variables $\varphi(x) = \alpha_{ij} x_i x_j$ définie positive est décomposable sous la forme*

$$(3) \quad \varphi_{1,2,\dots,h}(x_{h+1}, \dots, x_r) + \psi_{1,\dots,h}(\xi_1, \dots, \xi_h),$$

d'une somme de deux formes > 0 , aux variables respectives $x_{h+1}, \dots, x_r$ et $\xi_1, \dots, \xi_h$;

$$\varphi(x) = \psi(\xi), \quad \xi = \alpha_{ij} x_j.$$

Il en résulte que

$$\varphi_{1,2,\dots,h} \text{ est réciproque de } \psi(0, \dots, 0; \xi_{h+1}, \dots, \xi_r),$$

$$\psi_{1,2,\dots,h} \text{ est réciproque de } \varphi(x_1, \dots, x_h; 0, \dots, 0).$$

Démonstration. — Soit dans l'espace euclidien à r dimensions, un système d'axes Ox_i , tels que

$$\overline{OM}^2 = \varphi(x_i).$$

Appelons P le plan $Ox_1, \dots, Ox_h (x_{h+1} = \dots = x_r = 0)$; Π le plan mené en O perpendiculairement à P ($\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_h = 0$).

On a d'une façon unique

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Op} + \overrightarrow{O\varpi}, \quad \overline{OM}^2 = \overline{Op}^2 + \overline{O\varpi}^2,$$

$\overrightarrow{Op}$ et $\overrightarrow{O\varpi}$ étant respectivement dans P et Π .

p a mêmes coordonnées $\xi_1, \dots, \xi_h$ que M , et $\overline{Op}^2$ est une forme

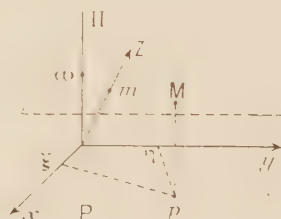


Fig. 1.

positive des $\xi_1, \dots, \xi_h$. Parallèlement à P , M se projette en m sur $Ox_{h+1}, \dots, x_r = O$ et en ϖ sur Π et $\overline{O\varpi}^2$ ne dépend donc que de m ou $x_{h+1}, \dots, x_r$.

Cette propriété algébrique est ainsi démontrée géométriquement en supposant φ définie positive; elle vaut donc pour φ quelconque non dégénérée ($\Delta = |\alpha_{ij}| \neq 0$), et aussi pour la forme bilinéaire symétrique $\varphi(x_i, y_i)$. On verra plus loin une démonstration par le calcul, montrant que la propriété s'étend à toute forme bilinéaire non dégénérée à $2r$ variables.

La formule à démontrer s'écrit

$$\begin{aligned} &= 2 \left[f_{n_1}^2 d\varphi + \sum_i \delta_i f_{n_{i-1}}^2 d\varphi_i + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_{r-1}} \delta_{i_1, \dots, i_{r-1}} f_{n_{i_1-1}, \dots, n_{i_{r-1}-1}}^2 d\varphi_{i_1, \dots, i_{r-1}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i_1, \dots, i_{r-1}} \delta_{i_1, \dots, i_{r-1}} f_{n_{i_1-1}, \dots, n_{i_{r-1}-1}}^2 d\varphi_{i_1, \dots, i_{r-1}} \right] \\ &= d \left[f_{n_1}^2 + \sum_i \delta_i f_{n_{i-1}}^2 + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_{r-1}} \delta_{i_1, \dots, i_{r-1}} f_{n_{i_1-1}, \dots, n_{i_{r-1}-1}}^2 + \Delta f_{n_{i_1-1}, \dots, n_{i_{r-1}-1}}^2 \right]. \end{aligned}$$

Une fois écrite, il est relativement facile de la démontrer.

$\delta_{i_1, \dots, i_k} = \delta$ désignant le déterminant formé des lignes et colonnes $i_1, \dots, i_k$, et $A_{i_t}^{i_\tau}$ les mineurs algébriques de δ , les $\frac{A_{i_t}^{i_\tau}}{\delta}$ sont les coefficients de $\psi_{i_1, \dots, i_h}(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_h})$, t et τ appartenant au groupe $g = (1, \dots, h)$ de nombres, g' étant le groupe complémentaire $g' = (h+1, \dots, r)$.

On a

$$d\varphi_{i_1, \dots, i_h} = d\varphi - d\psi_{i_1, \dots, i_h} = 2x_j d\xi_j - 2 \frac{A_{i_t}^{i_\tau}}{\delta} \xi_{i_\tau} d\xi_{i_t} \quad \text{d'après (3)}.$$

Posons $f^2 = \Lambda$,

$$- 2 \delta_{i_1, \dots, i_h} X_{n_{i_1}-1, \dots, n_{i_h}-1} d\varphi_{i_1, \dots, i_h} \quad \text{vaut d'après (1),}$$

$$\delta dX_{n_{i_g}-1} + \delta \frac{\partial}{\partial x_i} X_{n_{i_g}-1, n_i-1} d\xi_i - A_{i_t}^{i_\tau} A_{i_t}^{i_\tau} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} X_{n_{i_g}-1, n_i-1} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} X_{n_{i_g}-1} \right] d\xi_{i_t},$$

$n_i - 1$ doit être remplacé par $n_i - 2$ quand $i \in i_g$.

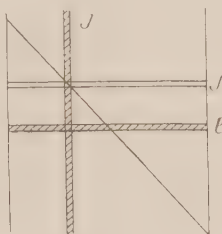


Fig. 2.

Le premier terme est celui qu'il faut trouver au deuxième membre, il en reste trois; le troisième vaut $- A_{i_t}^{i_\tau} \frac{\partial}{\partial x_{i_\tau}} X_{n_{i_g}-1} d\xi_{i_t}$, le deuxième se réduit quand $i \in i_g$ à $-\delta \frac{\partial}{\partial x_i} X_{n_{i_g}-1, n_i-2}$ et se détruit avec la partie correspondante du 2^e terme; il reste

$$(\delta d\xi_i - A_{i_t}^{i_\tau} A_{i_t}^{i_\tau} d\xi_{i_t}) \frac{\partial}{\partial x_i} X_{n_{i_g}-1, n_i-1} - A_{i_t}^{i_\tau} \frac{\partial}{\partial x_{i_\tau}} X_{n_{i_g}-1} d\xi_{i_t}, \quad \text{avec } i \in i_{g'};$$

le troisième terme, pris pour $g^1 = 1, 2, \dots, h, j$, avec les mineurs A' dans $\delta' = \delta_{i_1, \dots, i_h, i_j}$, vaut

$$A_{i_t}^{i_\tau} \frac{\partial}{\partial x_{i_\tau}} X_{n_{i_g}-1, n_{i_j}-1} d\xi_{i_t},$$

son terme en $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ a pour coefficient de $-\frac{\partial}{\partial x_{ij}} X_{n_{i_g}-1, n_{i_j}-1} d\xi_{i_t}$.

$A_{i_t}^{tj}$ mineur de $\alpha_{i_t}^{tj}$ dans δ' , et développé suivant la ligne j , il vaut

$$(-1)^{t+j} \alpha_{i_t}^{tj} A_{i_t}^{tj} (-1)^{t-j+1} = -\alpha_{i_t}^{tj} A_{i_t}^{tj}$$

(car les α_i coefficients de φ sont symétriques, et les A sont pris dans un déterminant diagonal), les signes étant rapportés au seul déterminant $\delta_{i_1, \dots, i_h, i_j} = \delta'$.

Ceci vaut pour $j \neq t$, mais t peut égaler j dans les termes en A' , ce qui donne

$$\dots \delta \frac{\partial}{\partial x_{ij}} X_{n_1-1, \dots, i, i} d\tilde{z}_i \quad (j \in g'),$$

finalement tous les termes se détruisent.

Cependant pour $h = n$, il n'y a plus de termes au premier membre pour détruire les termes pour $h = n - 1$, mais ces derniers donnent alors, les A' étant les mineurs $\Delta \beta_{i_t}^{tj}$ de Δ ,

$$\Delta [\beta_{i_j}^{tj} d\tilde{z}_{i_j} + \beta_{i_t}^{tj} d\tilde{z}_{i_t}] = \Delta dx_{i_j} \quad \text{comme coefficient de } \frac{\partial}{\partial x_{i_j}} X_{n_1-1, \dots, n_r-1},$$

c'est bien le terme $\Delta dX_{n_1-1, \dots, n_r-1}$.

GÉNÉRALISATION DU LEMME PRÉCÉDENT. — $\varphi(x, y) = \alpha_{ij} x_i y_j$ est une forme bilinéaire à déterminant Δ des α_{ij} , $\neq 0$,

$$\varphi = x_i \eta_i = \tilde{z}_i y_i,$$

avec

$$\eta_i = \alpha_{ij} y_j, \quad \tilde{z}_i = \alpha_{ij} x_j$$

ou

$$y_j = \beta_{ij} \eta_i, \quad x_j = \beta_{jt} \tilde{z}_i;$$

la forme réciproque est

$$\psi(\tilde{z}_i, \eta_i) = \varphi(x_i, y_i) = \beta_{ij} \tilde{z}_j \eta_i.$$

Comme plus haut, g représente le groupe des entiers de 1 à h , g' de $h+1$ à r .

Démontrons que

$$(3') \quad \varphi(x, y) = \varphi_g(x_g, y_g) + \psi_{g'}(\tilde{z}_{g'}, \eta_{g'});$$

$\psi(\xi_{g'}, \eta_{g'})$ a pour coefficients les $\beta_{ij} [i, j \in (g)]$ qui forment un mineur de Δ {on fait $\xi_{i'} = \eta_{i'} = 0 [i' \in (g')]$ }.

La forme réciproque φ_g a pour coefficients les $\delta_{i,j}$ mineurs algébriques normés de δ .

Corrélativement $\varphi(x_g = y_g = 0, x_{g'}, y_{g'})$ a une forme réciproque $\psi_{g'}$ dont les coefficients sont les mineurs algébriques normés, soient $\frac{\varepsilon_{i',j'}}{\varepsilon}$, du déterminant ε des $\alpha_{i',j'}$, pour $i', j' \in (g')$ (mineur de Δ) (l'accent sur ε indique que ce mineur est pris avec son signe).

Alors

$$\begin{aligned} \varphi_g &= \sum_{i=1}^h x_i \bar{\eta}_i, & \bar{\eta}_i &= \delta_{ij} y_j = \delta_{ij} \beta_{lj} \eta_l = \eta_i + \delta_{ij} \beta_{lj} \eta_l & [l' \in (g')]; \\ \psi_{g'} &= \sum_{l=1}^{h-1} \eta_l x_l, & \bar{x}_l &= \frac{\varepsilon_{l',j'}}{\varepsilon} \xi_{j'} = \frac{\varepsilon_{l',j'}}{\varepsilon} \alpha_{lj'} x_l = x_l + \frac{\varepsilon_{l',j'}}{\varepsilon} \alpha_{lj'} x_l & [l \in (g)]. \end{aligned}$$

En portant dans (3') et identifiant en $x_i \eta_l$ (après échange de i, i' et l, l' dans le deuxième terme)

$$(4) \quad \delta_{ij} \beta_{lj} + \frac{\varepsilon_{l',j'}}{\varepsilon} \alpha_{lj'} = 0 \quad [i, j \in (g); l', j' \in (g')].$$

Remarquons que $\delta_{ij} \beta_{lj}$, où $l \in (g)$ est nul, sauf pour $l = i$, valant alors 1.

Mais dans Δ , les δ_{ij} sont des mineurs à $h-1$, lignes et colonnes; et leur signe par rapport à Δ est le même que par rapport à δ (parce que les lignes et colonnes de δ sont les h premières; ceci simplifie seulement un peu la discussion des signes); un tel mineur, non normé, pris dans le déterminant des mineurs non normés de Δ , c'est-à-dire des $\beta_{ij} \Delta$ vaut

$$\Delta^{h-1} (\delta_{ij} \delta) = \Delta^{h-2} i \varepsilon,$$

d'après les théorèmes généraux sur les déterminants, $i \varepsilon$ étant le mineur complémentaire, arithmétique, formé dans Δ , donc avec les lignes ($g+i$) et les colonnes ($g'+j$).

δ , d'après la règle précédente, vaut $\frac{\varepsilon}{\Delta}$, donc $\delta_{ij} = \frac{i \varepsilon}{\varepsilon}$ et (4) devient

$$(4') \quad i \varepsilon \beta_{lj} + \varepsilon_{l',j'} \alpha_{lj'} = 0.$$

Ajoutons à (4') les équations auxquelles elles se réduisent si $l \in (g)$

$$i \varepsilon \beta_{lj} = 0 \quad (l \neq i), \quad i \varepsilon \delta_{ij} = \varepsilon$$

comme remarqué plus haut sur les δ_{ij} .

Multipliant par $\alpha_{l'k}$ et sommant ces équations de 1 à r pour l' (ou l), on a le système équivalent

$$\begin{aligned} {}^k_i \varepsilon + \varepsilon'_{l',j'} \alpha_{ij'} \alpha_{l'k} &= \alpha_{ik} \varepsilon & [k \in (g)], \\ \varepsilon'_{l',j'} \alpha_{ij'} \alpha_{l'k'} &= \alpha_{ik'} \varepsilon & [k' \in (g')]; \end{aligned}$$

le deuxième groupe se vérifie immédiatement et le premier presque aussitôt.

Développons ${}^k_i \varepsilon$, deux fois, suivant la ligne i , puis la colonne k , on obtient

$${}^k_i \varepsilon = \alpha_{ik} \varepsilon - \alpha_{ij'} \alpha_{l'k} \varepsilon'_{l',j'};$$

le signe — dû à ce que le rang de j' doit être pris dans ${}^k_i \varepsilon$, et non dans ε , le premier possédant la colonne k toujours placée avant la colonne j' .

C. Q. F. D.

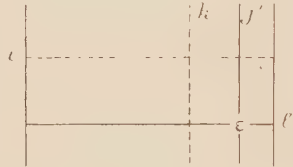


Fig. 3.

MAJORATION DES $\mathcal{H}_{n_i}^2(x_i)$. — A l'aide de la formule précédente, commençons par la limitation des $f_{n_i}^2(o) = \mathcal{H}_{n_i}^2(o)$. On a

$$e^{-\varphi(h_i)} = \frac{h_i^{n_i}}{n_i!} \mathcal{H}_{n_i}(o) r^{\frac{n_i}{2}} n_i!^{\frac{1}{2}} \sqrt{\Lambda} \quad \left(\Lambda = \frac{\sum \alpha_{ij}}{\sqrt{\Delta}} \right).$$

Développons $e^{-\alpha_{ij} h_i h_j}$ en $\sum \frac{(\alpha_{ij} h_i h_j)^{\frac{\nu}{2}}}{\frac{\nu!}{2}} (-1)^{\frac{\nu}{2}}$.

Le terme homogène de degré 2ν , nous donne

$$\sum \frac{1}{t_i! t_{ij}!} \alpha_{ij}^{t_{ij}} (2\alpha_{ij})^{t_{ij}} h_i^{2t_i + \sum_j t_{ij}} \quad \text{au signe près.}$$

Avec

$$n_i = 2t_i + s_i, \quad s_i = \sum_{j \neq i} t_{ij},$$

les s_i sont quelconques à condition que $n_i - s_i$ soit > 0 pair, ce qui s'écrit

$$\frac{\alpha_{ii}^2}{t_i! \, t_{ij}!} \frac{(2\alpha_{ij})^{t_{ij}}}{\sqrt{\alpha_{ii}\alpha_{jj}}^{t_{ij}}}, \quad \text{puisque } \alpha_{ii}\alpha_{jj} > \alpha_{ij}^2 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^v \frac{t_{ij}}{2} = \frac{s_i}{2},$$

ou encore, posant $\gamma_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ii}\alpha_{jj}}}$,

$$\frac{\left(\sum \frac{n_i - s_i}{2}\right)!}{\prod \left(\frac{n_i - s_i}{2}\right)!} \frac{\alpha_{ii}^{\frac{n_i}{2}} \gamma_{ii}^{t_{ii}}}{t_{ij}! \left(\frac{\nu}{2} - \sum t_{ij}\right)!};$$

la dernière fraction est de beaucoup majorée par

$$\frac{(1 + \sum |\gamma_{ij}|)^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}} = \frac{\sigma^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}}.$$

On peut aussi majorer la première fraction :

$\sum s_i$ est pair, les s_i impairs vont donc par couples, les n_i correspondants étant eux-mêmes impairs. On voit alors qu'on peut toujours

majorer par $\frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)!}{\left(\frac{n_1}{2} + \frac{1}{2}\right)! \left(\frac{n_2}{2} - \frac{1}{2}\right)! \dots}$, par exemple, si n_1 et n_2 sont

impairs; soit, en élevant au carré, avec $M = \max |\alpha_{ij}|$,

$$A 2^\nu \frac{n_i!}{[n_i!]^2} \mathcal{H}_{n_i}^2(0) \leq \frac{(M\sigma)^\nu}{\left[\frac{n_i}{2}\right]^2} \quad \text{ou} \quad \mathcal{H}_{n_i}^2(0) \leq \frac{1}{A} \frac{n_i!}{\left[\frac{n_i}{2}\right]^2} \left(\frac{M\sigma}{2}\right)^\nu \quad (\nu = \sum n_i),$$

$\left[\frac{n_i}{2}\right]^2$ signifiant, si n_i est impair, $\frac{n_i - 1}{2}! \, \frac{n_i + 1}{2}!$

Si ν est impair $\mathcal{H}_{n_i}^2(0) = 0$. Soit B_{n_i} cette borne.

LIMITATION DE $[\mathcal{H}_{n_i}^2(0) + \sum \partial_i \mathcal{H}_{n_i-1}^2(0) + \dots]$ qui est

$$\geq [\mathcal{H}_{n_i}^2(x_i) + \sum \partial_i \mathcal{H}_{n_i-1}^2(x) + \dots],$$

Si $n_i = 2p$,

$$\frac{B_{n_i-1}}{B_{n_i}} = \frac{2}{M\sigma} \frac{(2p-1)!}{p!(p-1)!} \frac{[p-1]!}{2p!} = \frac{1}{M\sigma},$$

mais si $n_i = 2p + 1$,

$$\frac{B_{n_i-1}}{B_{n_i}} = \frac{2}{M\sigma} \frac{2p!}{[p!]^2} \frac{p!(p+1)!}{(2p+1)!} = \frac{1}{M\sigma} \left(1 + \frac{1}{2p+1}\right).$$

Nous multiplierons donc B_{n_i} par $\prod \left(1 + \frac{1}{2p_i + 1}\right)$ pour tous les $n_i = 2p_i + 1$, soit B'_{n_i} .

Le crochet est majoré par

$$\begin{aligned} B'_{n_i} \left[1 + C_r^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \right)^2 + C_r^4 \left(\frac{\sqrt{4}}{\sigma} \right)^4 + \dots \right] & \quad \text{si } \Sigma n_i = 2\nu, \\ B'_{n_i} \left[r^{-1} + C_r^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{\sigma} \right)^3 + \dots \right] & \quad \text{si } \Sigma n_i = 2\nu + 1. \end{aligned}$$

[Nous avons majoré $\partial_{i_1, \dots, i_h}$ par $(hM^2)^{\frac{h}{2}} = (\sqrt{h}M)^h$.

Limitant chacun de ces deux crochets par $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)^2 = KA$, on a

$$e^{-2\varphi} \mathcal{H}_{n_i}^2(x_i) \leq K \left(\frac{M\sigma}{2} \right)^{\Sigma n_i} \prod \left(1 + \frac{1}{n_i} \right) \frac{n_i!}{\left[\frac{n_i!}{2} \right]^2} \quad \text{pour tous } n_i \text{ et tous } x_i.$$

On peut en déduire une limitation asymptotique analogue à celle indiquée pour $r = 1$ au début de ce chapitre, car la formule de Stirling donne

$$\frac{n_i!}{\left[\frac{n_i!}{2} \right]^2} \sim \frac{2^{n_i}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} n_i}}, \quad \text{soit la borne } \sim \frac{K'(M\sigma)^\nu}{\sqrt{n_1 n_2 \dots n_r}}$$

et il est certain que la série $\Sigma t_i^{n_i} \mathcal{H}_{n_i}(y) \mathcal{H}_{n_i}(x)$ est absolument convergente à l'intérieur du cercle $|t_i| \leq \frac{1}{M\sigma}$.

COMPLÈTE INTÉGRABILITÉ DU SYSTÈME AUQUEL SATISFAIT $H_{n_i}(x_i)$. — C'est (4.6).

Posons

$$\begin{aligned} f_{n_i} &= a_{n_i} e^{-\frac{\varphi}{2}} \psi_{n_i} = e^{-\varphi} \Pi_{n_i} & e^{-\varphi} \frac{\partial \Pi_{n_i}}{\partial \xi_i} &= 2x_i f_{n_i} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} f_{n_i}, \\ e^{-\varphi} \frac{\partial^2 \Pi_{n_i}}{\partial x_i \partial \xi_i} &= \left[2f_{n_i} + 2x_i \frac{\partial f_{n_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \xi_i} f_{n_i} \right] + 2\xi_i \left[2x_i f_{n_i} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} f_{n_i} \right]; \end{aligned}$$

(6) devient alors

$$(6') \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial \zeta_i} + 2x_i \frac{\partial f_{n_i}}{\partial x_i} + 2(n_i + 1)f_{n_i} = 0 \quad (i \text{ donné}).$$

Si nous posons $f_{n_i} = \frac{\partial^v F}{\partial x_i^{n_i}}$, F est définie à un polynome ϖ_{v-1} près $\left(\frac{\partial^v \varpi}{\partial x_i^{n_i}} \equiv 0\right)$ et satisfait à

$$(7) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \zeta_i} + 2x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + 2F = 0, \quad \text{car} \quad x_i \frac{\partial^v}{\partial x_i^{n_i}} = \frac{\partial^v}{\partial x_i^{n_i}} x_i - n_i \frac{\partial^v}{\partial x_i^{n_i}},$$

système qui ne dépend plus des n_i , et qui définit à partir de toutes ses solutions, des fonctions telles que $e^\varphi \frac{\partial^v F}{\partial x_i^{n_i}}$, qui égalent H_{n_i} pour $F = e^{-\varphi}$.

C'est (7) dont nous allons montrer qu'il est complètement intégrable; soit z la fonction inconnue; les équations (7) donnent $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}$ en fonction des $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ ($i \neq j$).

Par dérivation de l'équation (i) par rapport à j , et de (j) par rapport à i . On déduira

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i^2 \partial x_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x_j^2 \partial x_i} \quad \text{en fonction de} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad (i \neq j \neq k \neq i)$$

et ainsi de suite jusqu'aux dérivées de

$$T = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \dots \partial x_r};$$

désignons par

$$r_{ij} = \frac{\partial^{r-2} z}{\partial x_k \dots} \quad (k \neq i, k \neq j) \quad \text{et} \quad r_i = \frac{\partial^{r-1} z}{\partial x_k \dots} \quad (k \neq i),$$

$$s_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \quad (s_{ii} = T), \quad X_i = \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

on a, de (7),

$$(7') \quad \beta_{ij} X_j + 2x_i T + 2r_i = 0,$$

$$(7'') \quad \beta_{ij} s_{kj} + 2x_i r_k + 2r_{ik} = 0 \quad (i \neq k),$$

d'où l'on tire les $\frac{\partial r_i}{\partial x_j}$ en fonction de r_i , r_{ij} , T et les X_j en fonction de r_i , T.

On peut alors, avec les inconnues

$$u_1 = z, \quad u_2 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad u_{2^r} = T = \frac{\partial^r z}{\partial x_1 \dots \partial x_r},$$

en nombre 2^r écrire 2^r équations aux différentielles totales ne faisant intervenir que ces inconnues

$$du_1 = u_2 dx_1 + \dots + u_{r+1} dx_r, \quad du_2 = f_1 \left[u_1, \dots, u_{r+1 + \frac{r(r-1)}{2}} \right] dx_1, \quad \dots, \\ dT = X_i dx_i.$$

Les $2^r - 1$ premières équations sont, de par leur nature complètement intégrables (la différentielle d'une dérivée d'ordre h , fait intervenir les dérivées d'ordre $h + 1$, inconnues, et il n'y a pas de condition de compatibilité à exprimer), mais pour la dernière, on a

$$X_j = -\alpha_{ij}(2x_i T + 2r_i) = -(2\tilde{z}_j T + 2\alpha_{ij} r_i),$$

d'où

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = -\alpha_{ij}(2x_i X_k + 2s_{ik} + 2T \delta_{ik}).$$

On doit avoir identiquement en $x_i, r_i, r_{ik}, \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$, après avoir tiré les Δ_{ij} de (7''), soit

$$\left(\frac{\partial X_j}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) = 2(2\alpha_{ij} r_i \tilde{z}_k - \alpha_{ik} s_{ij}) - 2(2\alpha_{ik} r_i \tilde{z}_j - \alpha_{ij} s_{ik}) = 2(u_{jk} - u_{kj}),$$

d'où

$$\beta_{ij} u_{jk} = 2r_i \tilde{z}_k - \beta_{ij} \alpha_{ik} s_{ij} = 2r_i \tilde{z}_k + \alpha_{ik}(2x_i r_i + 2r_{ii}) - \alpha_{ik} \beta_{ij} s_{ij} \quad \text{d'après (7')} \\$$

et

$$\beta_{ij} u_{ki} = 2\alpha_{ik} r_i x_i + s_{ik},$$

soit

$$\beta_{ij}(u_{jk} - u_{kj}) = 2\alpha_{ik} x_i r_i + 2\alpha_{ik} r_{ii} - \alpha_{ik} \beta_{ij} s_{ij} + s_{ik}.$$

Or, sommant toutes les équations (7'') multipliées par $\alpha_{il} (i \neq k)$,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{il} \beta_{ij} = \delta_{lj} - \alpha_{kl} \beta_{kj},$$

et il vient

$$s_{kl} - \alpha_{kl} \beta_{kj} s_{kj} + 2\alpha_{il} x_i r_k + 2\alpha_{il} r_{ik} = 0,$$

donc (échanger l et k , $r_{il} = r_{ki}$)

$$u_{jk} = u_{kj}.$$

Des systèmes du type (7) (plus généraux) ont, supposés complètement intégrables, été étudiés par Lauricella ⁽⁸⁾ qui montre que leur solution générale dépend de 2^r constantes arbitraires. Les résultats sont rapportés dans l'Ouvrage cité de MM. Appell et Kampé de Fériet qui les utilisent pour $r=2$. Nous pourrions regarder d'un peu plus près la nature de ces 2^r solutions linéairement indépendantes.

(7) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i} + 2x_i F \right) = 0, \quad \text{soit} \quad f_i = \frac{\partial F}{\partial \xi_i} + 2x_i F,$$

f_i ne dépend pas de la variable x_i .

En écrivant $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_i}$, on obtient

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} - 2x_j \frac{\partial F}{\partial \xi_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \xi_i} - 2x_i \frac{\partial F}{\partial \xi_i},$$

où

$$\frac{\partial f_j}{\partial \xi_i} + 2x_i f_j = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} + 2x_j f_i$$

ne dépendent ni de x_i , ni de x_j , donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f_j}{\partial \xi_i} + 2x_i f_j \right) = 0,$$

et ainsi de suite.

Posons

$$F e^{\varphi} = \Phi, \quad f_i e^{\varphi} = \Phi_i, \quad f_{ij} e^{\varphi} = \Phi_{ij}, \quad \dots$$

alors

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} = f_i e^{\varphi} = \Phi_i$$

et, d'une façon générale,

$$\frac{\partial \Phi_{i_1, \dots, i_k}}{\partial \xi_{i_{k+1}}} = \Phi_{i_1, \dots, i_{k+1}} = e^{\varphi} f_{i_1, \dots, i_{k+1}},$$

ce f ne contenant aucune des variables d'indices $i_1, \dots, i_{k+1}$.

(8) LAURICELLA, *R. C. M. P.*, t. VII, 1893, p. 122-129.

A partir de là, il est facile de former des solutions linéairement indépendantes.

Pour une combinaison donnée $i_1, \dots, i_h$, nous choisissons $\Phi_{i_1, \dots, i_h} = e^\varphi$; on fera le premier pas de l'intégration en écrivant

$$\varphi = \psi(\xi_{i_r}, \dots, \xi_{i_r}) + \frac{x_{i_1}^2}{\beta_{i_1, i_1}}, \quad \int e^\varphi d\xi_{i_1} = e^{\psi(\xi_{i_r}, \dots, \xi_{i_r})} \int e^{\frac{x_{i_1}^2}{\beta_{i_1, i_1}}} dx_{i_1} \alpha_{i_1, i_1}.$$

Les différentes fonctions intervenant comme constantes d'intégration seront déterminées par les conditions ci-dessus.

h variant de 0 à r , et en prenant toutes les combinaisons des indices, on obtient $1 + r + \frac{r(r-1)}{2} + \dots = 2^r$ solutions, linéairement indépendantes. Pour $\Phi = 1$, on obtient $F = e^{-\varphi}$ qui engendrera par dérivation les polynômes d'Hermite et vu la forme des solutions pour Φ , autres que 1, il n'y a pas d'autres solutions polynomiales au système (7).

CHAPITRE III.

LES RELATIONS D'INCERTITUDE DE HEISENBERG.

COMPLÉMENTS SUR LES $\mathcal{H}_{n_i}(x_i)$. — Des définitions résulte que toute expression $P(x_i)\psi_{n_i}(x_i)$ est de carré sommable sur $(-\infty, +\infty)$, en particulier $x_i^{p_i}\psi_{n_i}(x_i)$, $P(x_i)$ étant un polynôme. On obtient les relations d'orthogonalité entre ces fonctions et les $x_i^{q_i}\gamma_{n_i}(x_i)$ par la même méthode que pour $p_i = q_i = 0$.

Posant $x_i = z_i + h_i + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial k_i}$, on a en effet

$$e^{-\varphi} \gamma_{\frac{1}{2}}^\varphi(x_i, h_i) \gamma_{\frac{1}{2}}^\varphi(x_i, k_i) = e^{2h_i k_i - \varphi(z_i)}.$$

On peut donc calculer

$$e^{2h_i k_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(z_i + h_i + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial k_i} \right)^{p_i} e^{-\varphi(z_i)} dz_i$$

et le résultat se développe en série absolument convergente en h_i, k_i .

On identifie alors ce développement et celui obtenu en intégrant terme à terme

$$e^{-\varphi} \gamma_1^{\varphi} \gamma_2^{\varphi} = e^{-\varphi} \sum \sum \frac{h_i^{m_i}}{m_i!} \frac{k_i^{n_i}}{n_i!} H_{m_i} G_{n_i}.$$

C'est la méthode utilisée par Hermite, et que rapportent MM. Appell et Kampé de Fériet (*loc. cit.*), pour démontrer l'orthogonalité des suites ψ_{n_i} et χ_{n_i} , mais sans justifier l'intégration terme à terme, ce qu'il nous reste à faire.

Posons

$$\gamma_1^{\varphi} = s_n + \rho_n, \quad s_n = \sum \frac{h_i^{m_i}}{m_i!} H_{m_i}$$

(c'est-à-dire $m_1, \dots, m_r$ variant de 1 à n).

Le développement de γ_1^{φ} est majoré par celui, γ_1^{φ} obtenu en remplaçant dans $e^{-\varphi(h_i) + 2\varphi(h_i, x_i)}$ les coefficients de l'exposant par leurs valeurs absolues. $\int e^{-\frac{\varphi}{2}} \rho_n$ est arbitrairement petit, car $\left| \int_{|x| \geq X} e^{-\frac{\varphi}{2}} \rho_n \right|$ majoré par $\int_{|x| \geq X} e^{-\frac{\varphi}{2}} \gamma_1^{\varphi}$ l'est pour X assez grand ($-\frac{\varphi}{2} + \alpha_{ij} h_i x_j$ étant $\leq -\frac{\varphi}{k}$, $k=4$, par exemple, si X est assez grand), et $\left| \int_{|x| \leq X} e^{-\frac{\varphi}{2}} \rho_n \right|$ l'est aussi pour n assez grand, comme on le vérifie avec la série majorante, en majorant de la façon classique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$.

De même $\int e^{-\varphi} \rho_n^2$ est arbitrairement petit pour n assez grand, donc $(^{\circ}) \int e^{-\varphi} (\rho_n^2 + 2\rho_n s_n)$ l'est aussi ($e^{-\frac{\varphi}{2}} s_n$ est borné par le maximum de $e^{-\frac{\varphi}{2}} \gamma_1^{\varphi}$, quel que soit n).

On a donc bien

$$\int e^{2h_i k_i - \varphi(z_i)} dz_i = \sum \int e^{-\varphi} \frac{h_i^{m_i}}{m_i!} \frac{k_i^{n_i}}{n_i!} h_{m_i} G_{n_i} dx$$

(^o) Nous montrons, pour simplifier, que l'intégration terme à terme de $e^{-\varphi} [\gamma_1^{\varphi}(h_i)]^2$ est licite, mais le même argument vaut pour $e^{-\varphi} \gamma_1^{\varphi}(h_i) \gamma_2^{\varphi}(k_i)$.

et le même raisonnement, donc le même processus d'identification, vaut aussi si l'on intègre $x_i^{p_i} e^{-\varphi} \gamma_1^{\varphi} \gamma_2^{\varphi} (p_i \neq 0)$.

Les relations de récurrence (II.1') nous permettraient aussi d'obtenir, de proche en proche, les valeurs des différentes expressions

$$\int x_i^{p_i} \psi_{m_i} \chi_{n_i} dx_i.$$

Soit $r=1$,

$$\varphi = \frac{x^2}{2\sigma^2}, \quad \frac{h^n}{n!} H_n^{\varphi}(x) = e^{\frac{-h^2 + 2hx'}{2\sigma^2}} = e^{-h'^2 + 2h'x'} \quad \text{si} \quad h' = \frac{h}{\sqrt{2\sigma}}, \quad x' = \frac{x}{\sqrt{2\sigma}}.$$

H désignant le polynome relatif à $\varphi = x^2$, on a

$$H_n^{\sigma}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\sigma})^n} H\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma}}\right),$$

mais si l'on norme $e^{-\varphi} H_n^{\sigma^2}$ et non $e^{-\varphi} H_n G_n$, on obtiendra le coefficient a'_n avec

$$a'_n = \frac{2^n n!}{(2\sigma^2)^n \sqrt{2\pi\sigma}}$$

au lieu de $a_n^2 = 2^n n! \sqrt{2\pi\sigma}$.

Soit

$$\varphi_n^{\sigma}(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma}}\right)}{(\sqrt{2\pi\sigma} 2^n n!)^{\frac{1}{2}}};$$

d'autre part

$$e^{-\varphi} \gamma_h \gamma_k = e^{\frac{2hk}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(x-h-k)^2}{2\sigma^2}},$$

donc

$$\int x e^{-\varphi} \gamma_h \gamma_k dx = e^{\frac{2hk}{2\sigma^2}} (h+k) \int e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \sqrt{2\pi\sigma} (h+k) e^{\frac{hk}{\sigma^2}},$$

car

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz &= 0, & a'_n a'_{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \varphi_n^{\sigma}(x) \varphi_{n+1}^{\sigma}(x)}{n! (n+1)!} dx &= \sqrt{2\pi\sigma} \frac{1}{n! \sigma^{2n}}, \\ \int x \varphi_{n-1}^{\sigma} \varphi_n^{\sigma} dx &= \sigma \sqrt{n}, & \int x \varphi_p \varphi_q dx &= 0 \quad \text{si} \quad p - q \neq 1. \end{aligned}$$

Ces résultats vont nous servir pour évaluer la dispersion d'une variable q , sa loi de probabilité étant une fonction $\psi(q)$ de carré du module sommable sur $(-\infty, +\infty)$.

CALCUL DE Δq . — q est une variable d'espace, rapportée à sa valeur moyenne, c'est-à-dire que $\int q|\psi|^2 dq = 0$. Soit $\Delta q = \sigma$ l'écart moyen, c'est-à-dire $\sigma^2 = \int q^2 |\psi|^2 dq = \|q\psi\|^2$, par définition, $\|f\|$ désignant la norme de la fonction f ou la racine carrée de l'intégrale de $ff^* = |f|^2$.

La fonction d'onde ψ , la plus simple, telle que $\bar{q} = 0$, $\bar{q}^2 = \sigma^2$ ($\bar{x}$ désigne $\int x|\psi|^2 dq$, moyenne de x) est $\frac{e^{-\frac{4\sigma^2}{(2\pi\sigma)^2}}}{(2\pi\sigma)^{\frac{1}{2}}} = \varphi_0^\sigma(x)$ et il est tout naturel de calculer $(\Delta q)^2$ en développant ψ suivant les φ_n .

Soit

$$\psi = \sum_0^\infty \alpha_n \varphi_n, \quad \sum \alpha_n \alpha_n^* = 1,$$

ψ appartenant à L^2 et normé.

Supposons $q\psi \in L^2$. Les coefficients de son développement suivant les φ_i sont ⁽¹⁰⁾

$$c_n = (\varphi_n, q\psi) = (q\varphi_n, \psi) = \sigma(\sqrt{n} \alpha_{n-1} + \sqrt{n+1} \alpha_{n+1}),$$

puisque (comme vu ci-dessus)

$$q\varphi_n = \sigma(\sqrt{n} \varphi_{n-1} + \sqrt{n+1} \varphi_{n+1}),$$

donc

$$\begin{aligned} q\psi^2 &= \sigma^2 \sum_0^\infty |\sqrt{n} \alpha_{n-1} + \sqrt{n+1} \alpha_{n+1}|^2 \\ &= \sum_0^\infty [(2n+1) |\alpha_n|^2 + 2\sqrt{(n+1)(n+2)} \alpha_n \alpha_{n+2}^*]. \end{aligned}$$

⁽¹⁰⁾ (f, g) désigne le scalaire $\int f^* g dq$.

Si $\sum n |\alpha_n|^2$ converge, $\sum \left| \sqrt{(n+1)(n+2)} \mathcal{R} \alpha_n \alpha_{n+2} \right|$ est borné par

$$\sqrt{s(s+1)} = \sqrt{\sum_0^\infty (n+1) |\alpha_n|^2} \sqrt{\sum_0^\infty n |\alpha_n|^2},$$

et $q\psi$ appartient bien à L^2 ; cette seule hypothèse suffit pour que la formule de développement soit valable.

PASSAGE A Δp . — Un calcul analogue quoique de justification moins facile pourrait être fait pour l'opérateur adjoint à la variable conjuguée p .

$$p\psi = \left\| \frac{\partial \psi}{\partial q} \right\|.$$

mais il est beaucoup plus simple d'utiliser la relation, classique en Mécanique ondulatoire, entre les lois de probabilité de deux variables conjuguées,

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} pq} \psi(q) dq.$$

C'est à peu près la transformation de Fourier, que l'on peut appliquer (dans l'espace de Hilbert) à toute fonction de carré sommable. Elle transforme $\varphi_n(x)$ en $i^n \varphi_n(x)$, pour $\sigma = 1$.

Comme $\varphi_n^2(x) = \varphi_n\left(\frac{x}{2\sigma}\right)$, à un coefficient près, on en déduit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau y} \varphi_n^\sigma(y) dy = \sqrt{2\sigma} i^n \varphi_n^\sigma(2\sigma^2 x)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} pq} \varphi_n^\sigma(q) dq = \frac{i^n}{\sqrt{h}} \sqrt{2\pi} \sqrt{2\sigma} \varphi_n^\sigma\left(-\frac{4\pi\sigma^2}{h} p\right) = \varphi(p).$$

$$\psi = \sum \alpha_n \varphi_n, \text{ soit } \psi' = \sum i^n \alpha_n \varphi_n,$$

$$\int p' \varphi(p) \varphi^*(p) = - \left(\frac{-h}{4\pi\sigma^2} \right)^3 \int t^3 \psi'(t) \psi^*(t) dt, \quad t = -\frac{4\pi\sigma^2}{h} p.$$

On passe de ψ à ψ' en multipliant par $\sqrt{\frac{4\pi\sigma^2}{h}}$ et α_n par i^n ,

$$\Delta p^{-2} = \frac{h^2}{16\pi^2\sigma^2} \left| 1 + 3 \sum_0^\infty n |\alpha_n|^2 - 2 \sum_1^\infty \sqrt{n(n-1)} \mathcal{R} \alpha_n \alpha_{n-1}^* \right|.$$

formule valable dans les mêmes conditions que la précédente (convergence de $\sum n |\alpha_n|^2$).

De

$$\|q\psi\|^2 = \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_{n-1}|^2 \left| 1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right|^2$$

et

$$\|p\psi\|^2 = \frac{h^2}{16\pi^2\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_{n-1}|^2 \left| 1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right|^2.$$

on déduit que l'existence simultanée des moments d'ordre 2 pour p et q entraîne la convergence de $\sum n |\alpha_n|^2$ (car sinon $1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ et $1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ tendraient simultanément vers zéro, ce qui est impossible).

Mais Δq peut exister (c'est-à-dire $q\psi \in L^2$) sans que Δp existe; il suffit de prendre

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{in}, \quad \text{mais alors } \sum n |\alpha_n|^2 = \infty$$

(et réciproquement Δp peut exister et non Δq).

D'où, puisque $\|\Delta q\|^2 = \sigma^2$,

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n(n-1)} \operatorname{Re} \alpha_n \alpha_{n-2}^* = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_{n-1}|^2$$

soit

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2$$

sous l'hypothèse que ces deux moments d'ordre 2 existent; p est aussi rapporté à sa valeur moyenne. Le produit des écarts est minimum pour la loi de Gauss, comme nous le savons bien, et pour une autre loi, augmente d'autant plus que l'on « s'écarte » plus de cette loi.

Les mêmes formules valent pour r variables d'espace, relativement à deux variables conjuguées de cet espace, il suffit si

$$\psi = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_r} \alpha_{n_1, n_2, \dots, n_r} e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_r x_r)}$$

de remplacer $|\alpha_n|^2$ par $\sum_{j \neq 1} |\alpha_{n_1, \dots, n_r}|^2$, soit

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2} + \frac{h^2}{4\pi^2} \sum n_1 x_{n_1} \dots x_{n_r}.$$

la sommation étant étendue à tous les indices.

On a rapporté ψ aux

$$\varphi_{n_1, \dots, n_r} = \varphi_{n_1}^{\sigma_1}(x_1) \dots \varphi_{n_r}^{\sigma_r}(x_r) \quad (\sigma_1 = \Delta q_1, \dots, \sigma_r = \Delta q_r).$$

Supposons que nous rapportions ψ à des φ^σ de base σ quelconque par rapport à Δq et soit $\frac{\Delta q}{\sigma} = k$. On a alors

$$(\Delta p)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2\sigma^2} (2 - k^2 + 4 \sum n |\alpha_n|^2)$$

ou

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2} k^2 (2 - k^2) + \frac{h^2}{4\pi^2} k^2 \sum n x_n.$$

Si $k \neq 1$ le premier terme au deuxième membre est diminué, mais les termes suivants ne peuvent jamais être nuls. Prenons, par exemple, le cas où $\psi = \varphi_p^\sigma$,

$$(\Delta q)^2 = \sigma^2 (2p + 1), \quad (\Delta p)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2\sigma^2} (2p + 1),$$

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 = \frac{h^2}{16\pi^2} + \frac{h^2}{4\pi^2} p(p + 1) \quad \text{ou} \quad \Delta p \Delta q = \frac{h}{2\pi} \left(p + \frac{1}{2} \right).$$

Ce résultat s'applique au $p^{\text{ième}}$ état stationnaire de l'oscillateur harmonique linéaire, et précise dans ce cas l'équivalence présumée par Heisenberg comme valable dans tous les cas pour le $p^{\text{ième}}$ niveau stationnaire :

$$\Delta p \Delta q \sim p \frac{h}{2\pi}.$$

Relations d'incertitude exprimées par les quadriques de dispersion.

Rappelons l'origine mathématique de ces relations. Soient A et B deux opérateurs hermitiens [c'est-à-dire $(\psi, A\psi) = (A\psi, \psi)$]. $A\psi = f$, $B\psi = g$. (f, g) et (g, f) sont deux nombres complexes conjugués.

L'inégalité de Schwartz s'écrit

$$(f, g)^2 = \left[\frac{(f, g) + (g, f)}{2} \right]^2 + \left[\frac{(f, g) - (g, f)}{2i} \right]^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2,$$

ou comme $(f, g) = (\psi, AB\psi) = \overline{AB}$, c'est-à-dire moyenne de AB (pour la fonction d'onde ψ)

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left[\frac{AB + BA}{2} \right]^2 + \left[\frac{AB - BA}{2i} \right]^2,$$

pour $A = q$, $B = p$,

$$\frac{AB - BA}{2} = -\frac{h}{4\pi i}, \quad \text{d'où} \quad \Delta p \Delta q \geq \frac{h}{4\pi}.$$

QUADRIQUES DE DISPERSION. — Celle relative aux coordonnées d'espace, q_i , a pour équation $f(u_i) = 1$,

$$f(u_i) = \int \psi^* (\sum u_i q_i)^2 \psi d\tau = \overline{(u_i q_i)^2} \quad (d\tau = dq_1 \dots dq_n),$$

Nous appellerons $G(x_i) = 1$ celle relative aux coordonnées p_i (à un coefficient près), soit

$$\frac{h^2}{16\pi^2} G(x_i) = \left\| \sum x_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right\|^2 \frac{h^2}{4\pi^2} = \frac{h^2}{4\pi^2} \int \left\| \sum x_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right\|^2 d\tau.$$

Ces quadriques sont évidemment du type >0 , c'est-à-dire ellipsoïde,

Dans un changement linéaire de coordonnées, les u_i et x_i doivent être considérées comme coordonnées de variances contraires : u_i covariantes et x_i contrevariantes, c'est-à-dire subissant la même transformation que les q_i , alors $G(x_i) \frac{h^2}{16\pi^2}$ représente $\left\| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\|^2 \frac{h^2}{4\pi^2}$, l'axe des z ayant pour vecteur unitaire le vecteur de composantes contre-

variantes x_i et $f(u_i)$ représente $\|(\vec{OM}, \vec{OQ})\psi\|^2$, $\vec{OQ}$ ayant les u_i pour composantes covariantes. Si l'on fait $u_i = x_i$ la quantité $f(u_i) G(u_i)$ n'a de signification physique que relativement à des changements unitaires de coordonnées, les axes q_i étant supposés primitivement orthogonaux. De toutes façons, on a (cette hypothèse pouvant toujours être faite)

$$f(u_i) G(u_i) \geq (\sum u_i^2)^2$$

qui exprime que la relation $\Delta p \Delta q \geq \frac{h}{4\pi}$ vaut pour toute variable d'espace et sa conjuguée; l'égalité n'aura lieu identiquement que si la loi pour q est toujours celle de Gauss, soit

$$\psi = e^{-\frac{\sum q_i^2}{2\sigma^2}} (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}.$$

Pour obtenir une forme plus précise et s'exprimant géométriquement au moyen des quadriques de dispersion, il faut donc introduire la forme $F(x_i)$, réciproque de $f(u_i)$.

CAS DE LA LOI DE GAUSS :

$$\psi = e^{-\frac{\sum q_i^2}{2\Delta}} \frac{(2\pi\Delta)^{-n/2}}{\sqrt{\Delta}}$$

Δ déterminant de φ .

Si f est la forme réciproque de φ , la quadrique de dispersion de ψ_0 est $f(x_i) = 1$. Le plus simple est, pour le voir, de ramener φ à des axes qui lui soient conjugués, soit

$$\int f(x_i) dx_1 \dots dx_n = \int f(q_i) \frac{1}{\sqrt{\Delta}} dq_1 \dots dq_n = \int f(q_i) dq_1 \dots dq_n, \quad \text{car } \sqrt{\Delta} dq_i = dx_i.$$

Comme u_i et q_i sont de variances contraires, $\sum u_i^2 =$ forme réciproque de $\sum q_i^2$, $f(u_i)$ est celle de $\varphi(q_i)$.

De même,

$$(\sum \frac{x_i^2}{\lambda_i}) = (\sum \frac{q_i^2}{\mu_i}) = \sum \dots = \sum x_i^2$$

et les x_i et q_i ayant même variance,

$$G(x_i) = \varphi(x_i).$$

Donc pour la loi de Gauss,

$$G(u_i) - F(u_i) \equiv 0,$$

remarquons que si $\psi = \prod (\sqrt{2} \sigma_i)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u_i^2}{4\sigma_i^2}}$,

$$f(u_i) G(u_i) = (\sigma_i^2 u_i^2) \left(\frac{u_i^2}{\sigma_i^2} \right) = (\Sigma u_i^2)^2 + \sum \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_j} - \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \right)^2 u_i^2 u_j^2$$

qui ne se réduit au premier terme que si tous les σ_i sont égaux entre eux.

Dans le cas général, il est naturel de poser, supposant $f(u_i)$ connue, donc $F(x_i)$,

$$\psi = \psi_0 \chi(q_i), \quad \psi_0 = \frac{1}{a_0} e^{-\frac{1}{4} \sum x_i^2}, \quad a_0^2 = \frac{2\pi}{\Delta}$$

avec les notations habituelles $\xi_i = \alpha_{ij} q_j$, $F(q_i) = f(\xi_i)$, posant

$$\frac{1}{4} G(x_i) = \int \left| \Sigma x_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right|^2 d\tau = \int \left| \Sigma x_i \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \xi_i \chi \right) \right|^2 |\psi_0|^2 d\tau$$

Soient trois termes; le premier est

$$\int \left| \Sigma x_i \frac{\partial \chi}{\partial q_i} \right|^2 |\psi_0|^2 d\tau.$$

le troisième

$$\frac{1}{4} \int |\Sigma x_i \xi_i|^2 |\psi|^2 d\tau = \frac{1}{4} \int |\Sigma u_i q_i|^2 |\psi|^2 d\tau = \frac{1}{4} f(u_i) = \frac{1}{4} F(x_i);$$

les termes rectangles s'annulent car, par exemple :

$$\int \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_i} \chi^* + \frac{\partial \chi^*}{\partial q_i} \chi \right) \xi_i |\psi_0|^2 d\tau = \int |\psi_0|^2 \frac{\partial}{\partial q_i} (\chi \chi^*) \xi_i d\tau = - \int |\chi|^2 |\psi_0|^2 x_i \cdot \xi_i d\tau$$

on the

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

on the

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

on the

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

is the same as the one in the previous section, but with the addition of the term $\delta(x-a)$.

Now, the quadratic is the expression which we have seen before, and it is the same as the one in the previous section, but with the addition of the term $\delta(x-a)$. The quadratic is the expression which we have seen before, and it is the same as the one in the previous section, but with the addition of the term $\delta(x-a)$. The quadratic is the expression which we have seen before, and it is the same as the one in the previous section, but with the addition of the term $\delta(x-a)$.

PREMIÈRE THÈSE.

II.

Les Processus strictement stationnaires de Markoff et leurs corrélations.

SOMMAIRE. — Ce travail a, d'après les suggestions de M. Robert Fortet, été orienté vers l'étude des fonctions de corrélation des processus strictement stationnaires de Markoff; les nombreux travaux au sujet de ces processus (*cf.* plus loin) ont surtout porté sur leur comportement asymptotique, c'est-à-dire sur l'itération de l'opérateur linéaire $A(1)$ qui représente les probabilités de passage d'un état à un autre dans le temps unité. L'étude de la fonction de corrélation $\rho(t)$ ne permet plus de se limiter à ce point de vue, et toutes les propriétés du demi-groupe constitué par les opérateurs $A(t)$ doivent intervenir; il est naturel d'utiliser pleinement les progrès récents de la théorie des opérateurs linéaires et de l'analyse fonctionnelle respectivement dans un espace de Banach et une algèbre de Banach et ceci permet la plus grande généralité et plus de simplicité dans l'étude des problèmes.

Nous nous servons constamment des résultats de cette sorte exposés dans le traité de Hille (*cf.* plus loin) et, en particulier, de la notion de générateur du demi-groupe $A(t)$ (c'est-à-dire dans le cas le plus simple, de $\frac{dA(t)}{dt}$ pour $t=0$). Les propriétés de $\rho(t)$ sont liées de très

Nota. — Les résultats du chapitre III ont fait l'objet, partiellement, d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, présentée par M. Jacques Hadamard le 16 mai 1949.

près à celles de ce générateur a , à sa structure géométrique, et à beaucoup de problèmes importants de la théorie des opérateurs linéaires. Des résultats précis nécessitent des hypothèses restrictives et bien des problèmes que nous posons sont encore à résoudre.

C'est pourquoi nous consacrons le premier chapitre à un exposé des propriétés les plus simples et des résultats les plus importants de la théorie spectrale des opérateurs linéaires, ainsi qu'à celui de quelques théorèmes concernant le générateur d'un demi-groupe additif et la transformée de Laplace de ce demi-groupe; tout ceci, à quelques remarques près, d'après les travaux cités plus loin de Hille et N. Dunford.

Au deuxième chapitre, nous étudions les propriétés de $A(1)$ et a dues aux conditions particulières aux problèmes de probabilités, c'est-à-dire principalement au fait que $A(t)$ transforme toute fonction ≥ 0 en une fonction de même type : la propriété qui en découle immédiatement pour a est suffisante, dans le cas d'un nombre fini d'états possibles, ou dans le cas dénombrable et uniforme pour que $A(t)$ soit du type indiqué.

Étude de la construction de $A(t)$ à partir de $A(1)$.

Propriétés de $A(1)$ et, en particulier, des points du spectre, de module 1, importants pour l'étude asymptotique et qui ont déjà donné lieu à de nombreux travaux.

Le troisième chapitre traite de la forme générale de la corrélation $\rho(t)$. Le résultat principal est le suivant :

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x), \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \mathcal{R}[R(a, ix) Jf, g] dx,$$

$R(a, \lambda)$ étant la résolvante de a ; lorsque ix_0 (x_0 réel) est pôle pour a , R n'est pas défini, mais l'intégrale a un sens, lorsque x tend d'un côté vers x_0 , et subit une discontinuité en ce point. Cette formule implique les hypothèses suivantes : $A(t)$ est mesurable au sens fort pour $t \geq 0$, converge fortement vers J quand $t \rightarrow 0$ et a n'a sur l'axe imaginaire qu'un nombre fini de points singuliers isolés, pôles de la résolvante. Ceci entraîne, en particulier, l'analyticité de la partie continue du spectre de Fourier de $\rho(t)$. D'autres propriétés en résultent pour A et a relativement aux points ix_0 pôles de a , lorsque ceux-ci existent.

Nous donnons comme exemple de toutes ces notions, celui du mouvement brownien étudié par M. Paul Lévy.

Au chapitre IV, nous précisons les propriétés précédentes dans le cas fini.

La construction de $A(t)$ à partir de $A(1)$ nous permet de retrouver de façon naturelle la forme canonique de Jordan des matrices dans un espace euclidien projectif, et l'expression canonique exacte de toutes les solutions de l'équation $A(s)A(t) = A(s+t)$. Nous l'utilisons pour donner des exemples particuliers des propriétés exprimées auparavant et préciser la forme de $\rho(t)$, ainsi que le problème réciproque.

L'examen détaillé des chaînes à trois états possibles conduit à la conclusion, non évidente *a priori*, que

$$\rho(t) = s' \dots T / s'^{-1}, \quad \text{avec} \quad 0 \leq \rho(t) \leq 1 \quad (0 < s < 1),$$

n'est pas toujours corrélation d'une telle chaîne, en particulier que $\frac{T}{sL\frac{1}{s}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors que $\frac{T}{sL\frac{1}{s}} \leq 1$ suffit aux conditions écrites ci-

dessus et imposées à toute fonction de corrélation.

INTRODUCTION.

Le problème des chaînes simples constantes de Markoff, suivant l'expression de Doblin, a été étudié par un très grand nombre d'auteurs et dans des cas très variés. Dans le livre de M. Fréchet (Collection Borel, *Recherches théoriques modernes*), on trouvera une importante bibliographie pour les travaux antérieurs à 1938. Nous citerons en cours de route différents auteurs, donnant à ce moment des références, mais ne prétendons pas à être complet sur ce sujet.

Ce problème a d'abord été étudié dans le cas fini, c'est-à-dire d'un nombre fini d'états possibles, puis dans celui où il existe une densité de probabilité sur un ensemble borné, avec certaines restrictions (un des cas de M. Fréchet), dans le cas dénombrable [M. R. Fortet (¹)],

(¹) M. R. FORTET, *Thèse (Revista de Ciencias, Lima, 1938)*.

M. Doob ⁽²⁾]. Doblin ⁽³⁾ a étudié le cas général par une méthode directe. Nous posons ici le problème dans les mêmes conditions, en vue de lui appliquer la théorie générale des opérateurs linéaires; une telle façon de procéder a été utilisée par Yosida et Kakutani ⁽⁴⁾ pour une étude asymptotique et sous des conditions qui rentrent dans les cas étudiés par M. R. Fortet (chap. III, réf. citée).

POSITION DU PROBLÈME. — Ω est un ensemble abstrait, x désigne un point de cet ensemble : $x \in \Omega$. On ne considère dans la suite que certains sous-ensembles E de Ω , dits mesurables, formant un corps de Borel B ; c'est-à-dire B admet les deux opérations suivantes :

F_1 , addition d'un nombre fini, ou d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints;

F_2 , soustraction de deux ensembles dont l'un contient l'autre.

On peut compléter ces hypothèses par la troisième suivante : la réunion de deux ensembles (disjoints ou non) est permise, pour que la probabilisation ultérieure de ces ensembles soit tout à fait satisfaisante [cf. P. Lévy ⁽⁵⁾]; celle-ci sera, par exemple, réalisée par partition.

Les définitions de quelques-uns des termes employés ci-dessous seront rappelées et précisées au chapitre I.

Nous considérerons deux types de fonctions sur Ω :

1° $f(x)$ est une fonction mesurable sur Ω , c'est-à-dire que $\mathcal{E}[a < f(x) < b]$, ensemble des points où $a < f(x) < b$ est mesurable, ou $\mathcal{E} \in B$ { les postulats F_1 et F_2 entraînent alors que $\mathcal{E}[f(x) = a]$ est mesurable }; en outre, $f(x)$ est bornée sur Ω ; si $f(x)$ est à valeurs complexes, ses parties réelle et imaginaire sont chacune fonction mesurable sur Ω .

Ces fonctions constituent un espace de Banach $\mathfrak{B}$, la norme de $f(x)$

⁽²⁾ DOOB, *Trans. Amer. Math. Soc.*, july, 1942-1943.

⁽³⁾ DOBLIN, *Ann. de l'Éc. norm. sup.*, t. LVII, fasc. II.

⁽⁴⁾ YOSIDA et KAKUTANI, *Ann. of Math.*, 1941.

⁽⁵⁾ P. LÉVY, *Addition des variables aléatoires* (Collection Borel), Chap. II, § 10.

γ étant la borne supérieure du module de $f(x)$ sur Ω . Le seul point délicat est de démontrer que cet espace est complet, nous admettrons cette proposition affirmée dans Yosida (réf. citée).

La restriction que f soit bornée n'est pas essentielle en ce sens qu'on pourra modifier la définition de $\mathcal{B}$ pour l'adapter à un cas particulier (cf. chap. III, l'exemple du mouvement brownien).

2° $g(E)$ est une fonction complètement additive d'ensemble, c'est-à-dire que si $E = \sum_{i=1}^{\infty} e_i$, les e_i , disjoints et E étant des ensembles de B ,

$$g(E) = \sum_{i=1}^{\infty} g(e_i).$$

Ces fonctions forment un espace de Banach $\mathcal{B}'$, la norme γ étant la variation totale de $|g(E)|$ sur Ω , soit $\int_{\Omega} |g(dx)|$; il est facile ici de démontrer que $\mathcal{B}'$ est complet

$$\int_{\Omega} |g_n(dx) - g_m(dx)| < \varepsilon \quad \text{si } m, n, \text{ sont } > N(\varepsilon),$$

donc pour tout $\mathcal{E} \in B$, $|g_n(\mathcal{E}) - g_m(\mathcal{E})| < \varepsilon$ dans les mêmes conditions et $g_m(\mathcal{E}) \rightarrow g(\mathcal{E})$, la convergence étant uniforme par rapport à $\mathcal{E}$. Alors la complète additivité de g résulte de celle des g_m . $\mathcal{B}'$ appartient au dual ou espace adjoint de $\mathcal{B}$ (espace des fonctionnelles linéaires continues sur $\mathcal{B}$), $\int_{\Omega} g(dy) f(y) = (g^*, f)$ étant la fonctionnelle de f définie par g (produit scalaire de $f \in \mathcal{B}$ par la conjuguée g^* de g qui comme $g \in \mathcal{B}'$).

Ici, comme dans tout ce qui suit, les intégrales sont prises au sens de Lebesgue-Stieltjès généralisé, c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} g(dy) f(y) = \lim \sum g(e_i) f(x_i) \quad (e_i \in \mathcal{B}),$$

les e_i étant des ensembles de Ω dans lesquels l'oscillation de f est petite (par exemple en module et en argument, x_i étant un point arbitraire de e_i ; la limite est prise lorsque cette oscillation tend vers zéro, le nombre des e_i augmentant indéfiniment.

Les points de Ω forment les états possibles du système aléatoire considéré, dépendant du temps; à un instant t , la probabilité de E est $p(E, t) \geq 0$, $p \in \mathcal{B}$. La norme $\int_{\Omega} p(dx, t)$ vaut 1. On suppose bien définies les probabilités de passage du temps s au temps t , de l'état x , à un état appartenant à E , et que $P(x, E, s, t)$ est mesurable par rapport à x pour tout $E \in \mathcal{B}$ et, bien entendu, complètement additive en E . Sur $\mathcal{B}'$, la norme de P est 1, car

$$\int_{\Omega} P(x, dy) = P(x, \Omega) = 1, \quad \text{quels que soient } s \text{ et } t.$$

et

$$\int_{\Omega} P(x, dy, s, t) = 1;$$

elle est $\equiv 1$ sur $\mathcal{B}$.

Ce processus constitue une chaîne simple de Markoff si

$$P(x, E, s, t) = \int_{\Omega} P(x, dy, s, u) P(y, E, u, t) \quad (0 \leq s \leq u \leq t);$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas hérédité, $P(x, E, u, t)$ ne dépend pas de ce que l'on sait s'être produit à l'instant antérieur s , alors que dans le cas général (chaîne non markoffienne), il faudrait mettre dans la formule ci-dessus une probabilité conditionnelle $P(y, E, u, t/x_s)$.

Si $p(E, s)$ est la distribution de probabilité à l'instant s , à l'instant t elle est

$$p(t) = A p(s), \quad p(E, t) = \int_{\Omega} p(dx, s) P(x, E, s, t).$$

Si $X(x)$ est la valeur de la variable aléatoire pour l'état x , la valeur moyenne de $X(t)$, sachant qu'au temps s on était à l'état x_0 , est

$$\int P(x_0, dx, s, t) X(x) = f(x_0), \quad AX = f.$$

On voit que P définit deux opérateurs linéaires, A et A' opérant respectivement dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, transformant chacun de ces espaces en tout ou partie de lui-même. Les opérateurs $A(s, t)$ appartiennent à l'algèbre de Banach et des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{B}$.

Le produit scalaire de $g \in \mathcal{B}'$ et $f \in \mathcal{B}$ est

$$(g, f) = \int_{\Omega} g^* dx f(x).$$

(g^* est la quantité conjuguée de g). L'opérateur T tel que $T\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ sera dit hermitien si ($T \in \mathfrak{H}$ si $T\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$)

$$(Tf, g) = (f, Tg) \quad (f, g \in \mathcal{B}).$$

C'est le cas de p considéré comme opérateur multiplicatif

$$pf(x) = g, \quad g(E) = \int_E p(dx) f(x).$$

L'opérateur A vérifie la relation fondamentale des processus markoffiens

$$A(s, t) = A(u, t) A(s, u) \quad (\text{lire le produit de droite à gauche}).$$

de même A' (A' est d'ailleurs l'opérateur adjoint de A).

La chaîne est complètement définie par $A(s, t)$, $p(E, t_0)$, et $f(x)$ qui fixe les valeurs prises (et ceci indépendamment du temps) dans chacun des états possibles.

Dans le cas strictement stationnaire dont, seul, nous nous occuperons dans ce qui suit, tout le processus ne dépend que de $t - s$; les données sont $A(t)$, $p(E)$ ne dépendant plus du temps, et $X(x)$. Conditions nécessaires, puisque la loi à deux variables $X(s)$, $X(t)$ est $\mathcal{X}(E, E', t - s)$ et que $p(E, s) = \int_{\Omega} \mathcal{X}(E, dy, t - s)$ ne peut donc dépendre de s .

Les $A(t)$ ($0 \leq t < \infty$) forment alors un demi-groupe $\mathcal{O}$ à un paramètre, c'est-à-dire que leur ensemble admet l'opération $A(t) A(s)$ associative; $\mathcal{O}$ est même ici additif abélien

$$(1) \quad A(s) A(t) = A(t) A(s) = A(s + t).$$

On a de plus

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|A(t)\| \leq 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|Af\| \leq \|A\| \|f\| = \|f\|, \\ \text{la borne 1 étant atteinte pour } f = \text{const.}, \text{ ce que nous noterons } A1 = 1, \text{ et} \\ A(t) \text{ de type } \geq 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) \geq 0 \\ \text{pour tout } x \text{ entraîne } Af \text{ partout } \geq 0 \end{array} \right.$$

[ou ce qui est équivalent, $P(x, E, t) \geq 0$ pour tous x, E, t].

CHAPITRE I.

OPÉRATEURS LINÉAIRES ET DEMI-GROUPES.

A. DÉFINITIONS. — $\mathcal{B}$ est un espace de Banach, complexe, s'il est :

Vectériel sur le corps Γ des nombres complexes ou : f, g appartenant à $\mathcal{B}$, $\alpha f + \beta g$, α et β étant deux nombres complexes quelconques, appartient aussi à $\mathcal{B}$;

Norme : $\|f\|$ est un nombre > 0 , fonction de f , qui satisfait à

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \|f\| \geq 0 \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

la distance de f et g est $\|g - f\|$;

Complet : le critère de Cauchy de convergence d'une suite est valable ou : $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$ pour n, m assez grand entraîne l'existence d'un f , unique avec

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0 \quad \text{ou} \quad f_n \rightarrow f \quad (\text{convergence forte}).$$

une topologie (forte) est par suite bien définie dans $\mathcal{B}$.

A est un opérateur linéaire de $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ sur $\mathcal{R}$ (en anglais « range ») si : Af est défini pour tout f appartenant au domaine $\mathcal{D}$ de A , et c'est un point (ou vecteur) g du domaine $\mathcal{R}$; nous supposons ici que A opère dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire que $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$. De plus, $A(f + g)$ existe et égale $Af + Ag$ si Af et Ag existent.

A est borné si $\|Af\| \leq M\|f\|$ pour tout f de $\mathcal{D}$. La norme de A , $\|A\|$, est le plus petit membre M satisfaisant à cette inégalité; il est équivalent de dire que A est continu à l'origine, donc partout. A est alors défini (et borné) sur la fermeture $\bar{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ (ensemble des points de $\mathcal{D}$ et des points limites de points de $\mathcal{D}$). Au contraire, si, seulement

A est fermé : si les f_n de $\mathcal{D}$ ont une limite f dans $\mathcal{B}$, si les Af_n ont aussi une telle limite, g , alors $f \in \mathcal{D}$, et $Af = g$. On étend donc la définition de A à tous les points f pour lesquels cela est possible.

A admet un inverse A^{-1} , si la correspondance qu'il établit entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{R}$ est biunivoque

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R} \quad \text{ou} \quad Af = 0 \quad \text{entraîne} \quad f = 0.$$

Notons les propriétés simples suivantes :

A^{-1} borné équivaut à $\|Af\| \geq m\|f\|$ pour tout f , et $\|A^{-1}\|$ est l'inverse du plus grand m satisfaisant à cette inégalité;

A borné est fermé;

A fermé entraîne : si A^{-1} existe, il est aussi fermé; si A est partout défini dans $\mathcal{B}$, il est borné.

Algèbre $\mathcal{A}$ des opérateurs A linéaires bornés sur $\mathcal{B}$. — L'ensemble de ces opérateurs, supposés bornés et définis sur tout $\mathcal{B}$ ($\mathcal{D} = \mathcal{B}$), ou endomorphismes, forme en effet un espace vectoriel, normé (norme définie ci-dessus); une multiplication y est définie, associative et distributive par rapport à l'addition, au sens du produit de deux transformations (à lire de droite à gauche), enfin il est immédiat que cet espace est complet, avec la topologie, dite uniforme, définie par la norme.

On définit dans $\mathcal{A}$:

Une topologie forte, $A_n \rightarrow A$, au sens fort si $A_n f \rightarrow A f$ pour tout $f \in \mathcal{B}$;

Une topologie faible, $A_n \rightarrow A$, au sens faible si $(g, A_n f) \rightarrow (g, A f)$ pour tout f et tout g [cf. Introduction, g est une fonctionnelle de f , appartenant à l'espace adjoint $\mathcal{B}^*$, (g, f) est le produit scalaire $g(f)$].

On démontre que $\mathcal{A}$ est complet avec la topologie forte, mais non forcément avec la topologie faible.

Nous renvoyons pour les démonstrations aux paragraphes 2.12 à 2.16 du traité de Hille ⁽⁶⁾.

B. RÉSOLVANTE ET SPECTRE (cf. Hille, chap. V). — La décomposition de l'espace $(\mathcal{B})$ en sous-espaces invariants par A est intimement liée aux propriétés de la résolvante

$$R_\lambda \equiv R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1},$$

I étant l'opérateur identité ou unité.

⁽⁶⁾ HILLE, *Functional analysis and semi-groups* (*Ann. Math. Soc.*, Colloquium XXXI).

Si R_λ n'existe pas (pour une valeur particulière de λ) c'est que $(\lambda I - A)f = 0$ a au moins une solution; dans le cas contraire, on distingue, avec $(\lambda I - A)\mathcal{D} = \mathcal{R}_\lambda$, suivant que $\mathcal{R}_\lambda$ est dense sur $\mathcal{B}$ et R_λ borné ou non, ou que $\mathcal{R}_\lambda$ est non dense sur $\mathcal{B}$, les éventualités complémentaires suivantes : λ appartient à

$\rho(A)$ ou ensemble résolvant : R_λ est défini sur $\mathcal{R}_\lambda$ dense sur $\mathcal{B}$, et borné; donc si A est fermé (R_λ l'est alors aussi), R_λ est partout défini et $R_\lambda \in \mathcal{A}$;

$\sigma_c(A)$ spectre continu : $\mathcal{R}_\lambda$ dense sur $\mathcal{B}$, mais R_λ non borné;

$\sigma_R(A)$ spectre résiduel : $\mathcal{R}_\lambda$ non dense sur $\mathcal{B}$; ajoutons le 1^{er} cas;

$\sigma_p(A)$ spectre ponctuel : R_λ n'existe pas, $Af = \lambda f$ a des solutions.

On a les propriétés fondamentales suivantes :

1° $\rho(A)$ est un ensemble ouvert du plan complexe, car

$$\lambda I - A = B_\lambda = \lambda - \lambda_0 + B_{\lambda_0}, \quad \text{d'où} \quad R_\lambda = R_{\lambda_0} [I + (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}]^{-1}$$

et si $R_{\lambda_0} \in \mathcal{A}$, $R_\lambda \in \mathcal{A}$ pour $\lambda - \lambda_0$ assez petit, donc σ (ensemble du spectre) est fermé;

2° $R_\lambda - R_\mu + (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu = 0$ pour tous λ et $\mu \in \rho(A)$, ce qui résulte immédiatement de la définition. Ceci fait de R_λ une fonction vectorielle de λ qui est analytique, du moins localement, c'est-à-dire dans chaque portion connexe de ρ

$$R_\lambda = R_{\lambda_0} + \dots + (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}^{n+1} + \dots,$$

et réciproquement toute fonction (opérateur) de λ satisfaisant à 2° et régulière en un point λ_0 de son domaine ρ (c'est-à-dire $R_{\lambda_0} \in \mathcal{A}$) est résolvante de $A = \lambda_0 I - R_{\lambda_0}^{-1}$;

3° D'après les définitions

$$(\lambda I - A) R_\lambda = I, \quad R_\lambda (\lambda I - A) f = f \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{D}(A).$$

Toute la théorie classique de Cauchy des fonctions de variable complexe s'applique alors à ces opérateurs; les intégrales sur un contour formé de courbes de Jordan peuvent être prises au sens de Riemann dans tout $\rho(A)$ (cf. Hille, § 5.8 et 5.10).

Notons que σ se trouve dans $|\lambda| \leq \|A\|$ et que le développement

de R_λ , autour du point à l'infini et valable à l'extérieur de tout cercle $|\lambda| \leq M$ qui contient tout σ à son intérieur, est

$$R_\lambda = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \dots + \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} + \dots$$

(nous supposons ici A borné).

Décomposition spectrale. — Supposons A borné.

On appelle « spectral set » un sous-ensemble de σ , fermé, et disjoint du reste de σ ; ce complémentaire étant fermé, le spectral set est à la fois fermé et ouvert relativement à σ . Soit

$$\sigma = \sum \sigma_i$$

une décomposition de σ en une somme finie de tels sous-ensembles fermés disjoints; on peut les entourer de contours C_i , ne se coupant pas et entièrement situés dans $\rho(A)$ et définir alors

$$J_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} R_\lambda d\lambda, \quad A_i = J_i A = A J_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \lambda R_\lambda d\lambda, \quad R_i = J_i R = R J_i,$$

tous opérateurs bornés, permutant entre eux, orthogonaux deux à deux si les indices sont différents. Les J_i sont des projecteurs $J_i = J_i^2$ et définissent une décomposition de l'unité, donc de $\mathcal{B}$

$$I = \sum J_i, \quad E_i = J_i \mathcal{B};$$

A et R induisent dans les E_i les opérateurs A_i et R_i ; E_i est invariant par A (c'est-à-dire $A E_i \subset E_i$).

Plus généralement (cf. Nelson Dunford, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1943), soit $f(\lambda)$ fonction holomorphe sur un domaine contenant σ , donc sur un contour C entièrement dans ρ et contenant σ à son intérieur, on a

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) R_\lambda d\lambda \quad \text{et si} \quad f(\lambda) = \sum_0^\infty a_l \lambda^l, \quad f(A) = \sum_0^\infty a_l A^l.$$

[Le développement de $f(\lambda)$ étant supposé valable pour $|\lambda| \leq \rho$, $\rho > \|A\|$] et il y a isomorphie entre l'algèbre des $f(A)$, ainsi définis et celle des $f(\lambda)$. De plus, la décomposition spectrale de $f(A)$ est en correspondance parfaite avec celle de A , correspondance qui conserve

les espaces propres E_i et le caractère spectral d'un point λ de σ :

$$\sigma(A) = \sigma \left(\int_{\sigma} f(\lambda) d\lambda \right).$$

Noter que, en particulier, tous ces opérateurs permutent entre eux.

Application à un pôle d'ordre ν :

$$(1) \quad R_\lambda = C(\lambda) + \frac{J_0}{\lambda - \lambda_0} + \frac{C_2}{(\lambda - \lambda_0)^2} + \dots + \frac{C_\nu}{(\lambda - \lambda_0)^\nu};$$

au produit des deux fonctions $f_1 = (\lambda_0 - \lambda)^\nu$ et $f_2 = 1$ sur un voisinage de λ_0 , (λ_0 est point isolé de σ), $f_2 = 0$ ailleurs, correspond le produit des opérateurs $(\lambda_0 I - A)^\nu$ et J_0 , d'où

$$(\lambda_0 I - A)^\nu J_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} (\lambda_0 - \lambda)^\nu R_\lambda d\lambda = 0$$

[$C(\lambda)$ est régulier au voisinage de λ_0 , C_0 entoure λ_0], tandis que $(\lambda_0 I - A)^\nu J_0 \neq 0$ si $n < \nu$. D'ailleurs $(\lambda_0 I - A) C_\nu = 0$, il existe des vecteurs propres et $\lambda_0 \in \sigma_p$.

Ainsi, si $B_{\lambda_0} = \lambda_0 I - A$,

$$B_{\lambda_0}^\nu E_{\lambda_0} = 0, \quad B_{\lambda_0}^{\nu+1} E_{\lambda_0} = 0.$$

Réciproquement, soit $(\lambda_0 I - A)^n f = 0$, de

$$R_\lambda = \frac{1}{(\lambda_0 - \lambda)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \frac{B_{\lambda_0}^i f}{(\lambda_0 - \lambda)^{i+1}}$$

résulte

$$R_{\lambda_0} f = - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{B_{\lambda_0}^i f}{(\lambda_0 - \lambda)^{i+1}}, \quad \text{donc} \quad f = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} R_{\lambda_0} f d\lambda \in E_{\lambda_0}$$

et l'on a

$$(\lambda_0 I - A)^n f = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geq \nu.$$

Soit alors $\mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)}$ la variété que $B_{\lambda_0}^\nu$ annule (c'est-à-dire E_{λ_0}) et $\mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)} = B_{\lambda_0}^\nu \mathcal{B}$ (« range » ou domaine des valeurs de $B_{\lambda_0}^\nu$) et $\sigma = \lambda_0 + \sigma'$; nous avons

$$\mathcal{B} = E_{\lambda_0} + E_{\sigma'}.$$

Or B_{λ_0} réalise une transformation bicontinue de $E_{\sigma'}$ sur $E_{\sigma'}$ tout entier, car dans $E_{\sigma'}$,

$$B_{\lambda_0}^{-1} = f(A)$$

avec $f = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$ sur σ' et en son voisinage, $f = 0$ en λ_0 et autour de λ_0 , donc

$$\mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)} \supset B_{\lambda_0}^{\nu} E_{\sigma'} = E_{\sigma'},$$

mais $\mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)}$ n'a aucun point commun avec E_{λ_0} , car si $g = B_{\lambda_0}^{\nu} f \in E_{\lambda_0}$, $B_{\lambda_0}^{2\nu} f = 0$, donc $B_{\lambda_0}^{\nu} f = g = 0$, finalement

$$(2) \quad \mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)} + \mathcal{H}_{\lambda_0}^{(\nu)} = \mathcal{B},$$

en particulier, $\mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)}$ est une variété linéaire *fermée* (pour $\mathcal{H}_{\lambda_0}^{(\nu)}$, c'est évident). La relation (2) est caractéristique d'un pôle d'ordre ν et généralise une décomposition analogue dans le cas où $\mathcal{B}$ est l'espace projectif ordinaire à un nombre fini de dimensions. Cependant, la décomposition canonique de Jordan de A dans E_{λ_0} ne vaut plus, en général, quand E_{λ_0} a un nombre infini de dimensions (*cf.* Note présentée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, par M. Julia, le 21 février 1949).

Cas où A n'est pas borné. — Appelons a un tel opérateur, fermé mais non borné, comme celui dont nous aurons besoin par la suite, et soit σ_2 un « spectral set » borné de $\sigma(a)$; on définit comme plus haut J_2 , a_2 , R_2 , ces opérateurs, bornés, permutant entre eux, et nous aurons (Hille, § 3.14)

$$(\lambda J_2 - a_2) R_2(\lambda, a) = R_2(\lambda, a) (\lambda J_2 - a_2) = J_2.$$

Ajoutons ceci : soit

$$I = J_1 + J_2, \quad a = a_1 + a_2, \quad R = R_1 + R_2,$$

$a_2 = J_2 a = a J_2$, donc J_1 permute avec a , puis a_1

$$a_1 = a J_1 = J_1 a$$

[cette dernière égalité dans $\mathcal{O}(a)$ seulement]

$$R_2 = J_2 R = R J_2 \quad \text{entraîne} \quad J_2 R_1 = R_1 J_2 = 0,$$

d'où

$$R_1 J_1 = J_1 R_1 = R_1 \quad \text{et} \quad R_1 = R J_1 = R(a_1) J_1$$

résulte de la relation 3° du début de ce chapitre.

Cas particulier de l'espace de Hilbert. — Il est utile de rappeler ce cas, devenu classique par son importance en Physique théorique :

Par définition de l'espace $\mathcal{H}$

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\mathcal{R}(f, g) + \|g\|^2,$$

le deuxième terme étant une forme bilinéaire qui définit le produit scalaire (f, g) ;

A est hermitien s'il égale son adjoint A^* défini par $(Af, g) = (f, A^*g)$. Le spectre σ est alors situé sur l'axe réel Ox et, de plus, tout segment de cet axe définit un projecteur, et non plus seulement une portion disjointe du spectre

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dJ(\lambda), \quad A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dJ(\lambda);$$

$E(\lambda) = J(\lambda)$ $\mathcal{H}$ peut-être défini comme l'ensemble des f tels que $\|A^k f\| \leq |\lambda^k| \cdot \|f\|$ pour tout $k \geq 1$. C'est le remarquable théorème de décomposition spectrale des opérateurs hermitiens d'un espace de Hilbert (cf. Lengyel et Stone, *Ann. of Math.*, 1936).

Demi-groupes d'opérateurs. — Il s'agit d'opérateurs dépendant d'un paramètre $t \geq 0$, variant de 0 à ∞ et satisfaisant à

$$A(s) A(t) = A(s + t).$$

Nous citerons (Hille, chap. VIII, IX et XI) trois groupes de théorèmes :

1. Mesurabilité entraîne continuité. — La mesurabilité de $A(t)$ pour tout $t \geq 0$ entraîne la continuité pour $t > 0$.

Les deux termes s'entendent au sens uniforme ou au sens fort :

a. $A(t)$ est uniformément mesurable s'il existe une suite $A_n(t)$ qui converge uniformément (relativement à t , et sauf sur un ensemble de mesure nulle) vers $A(t)$, au sens de la topologie uniforme dans $\mathcal{A}$;

les $A_n(t)$ ne prenant chacun qu'un nombre dénombrable de valeurs distinctes, chacune sur un ensemble mesurable de valeurs de t ;

b. $A(t)$ est fortement mesurable si, pour tout f , il existe une suite $\varphi_n(t)$ qui converge presque uniformément (c'est-à-dire uniformément, sauf sur un ensemble de mesure aussi petite que l'on veut) vers $A(t)f$, les $\varphi_n(t)$ étant à valeurs dénombrables, dans le même sens qu'en *a*.

• Dans *b* on suppose $\|A(t)\|$ borné dans $0 < \varepsilon \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Si $\mathcal{B}$ est séparable, on peut remplacer ces deux hypothèses par : $A(t)$ est faiblement mesurable (c'est-à-dire $f^*[A(t)f]$ est mesurable en t (Lebesgue) pour tout $f^* \in \mathcal{B}^*$ (espace adjoint à $\mathcal{B}$) et tout $f \in \mathcal{B}$).

Remarquons que dans le cas où $\mathcal{B}$ est à un nombre fini de dimensions, ce problème avait été résolu par Doblin (*Bull. des Sc. math.*, 1938).

2. Générateur. — Sous l'une des deux hypothèses ci-dessus, nous supposons, en outre la continuité en 0 :

$$A(t) \rightarrow J \quad \text{au sens uniforme ou fort};$$

alors $J = J^2$ est un projecteur et :

$$\text{Cas uniforme } \frac{A(t) - J}{t} \rightarrow a, \text{ uniformément}$$

$$a = J a = a J, \quad A(t) = J e^{at}.$$

Nous sommes dans le cas borné et e^{at} est la fonction exponentielle de a au sens où nous l'avons envisagé dans la théorie spectrale; en particulier si $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$,

$$a = a_1 + a_2, \quad J = J_1 + J_2, \quad e^{at} = J_1 e^{a_1 t} + J_2 e^{a_2 t}.$$

Cas de convergence forte :

$$a = \lim A_{\eta} = \lim \frac{A(\eta) - I}{\eta}$$

n'est pas un opérateur borné dans J , mais fermé, non borné, défini dans $\mathcal{D}(a)$ dense sur J et

$$A(t)f = \lim_{\eta > 0} e^{t\eta} A_{\eta} f.$$

La correspondance entre $\sigma(a)$ et $\sigma[A(t)]$ n'est plus aussi parfaite; retenons qu'elle est rigoureuse entre $\sigma_p(a)$ et $\sigma_p[A(t)]$, au point o près de Σ_p [qui correspond à $-\infty$ pour $\sigma(a)$] et les vecteurs propres. Dans le cas d'un pôle d'ordre 1, les espaces propres sont donc les mêmes, puisqu'ils se composent des vecteurs propres. Ceci nous suffira pour assurer la décomposition de $A(t)$ en deux demi-groupes orthogonaux dont l'un correspond à des pôles de module 1 de $A(t)$.

5. Transformée de Laplace et résolvante. —

$$S(\lambda, a) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} A(t) dt$$

est défini pour

$$\mathcal{R}(\lambda) > \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|A(t)\| = \alpha,$$

comme transformation linéaire bornée.

C'est, dans $J\mathcal{B}$, la résolvante $R(\lambda, a)$. En effet, soit d'abord : a borné :

$$A(t) = e^{at} J, \quad S = \sum \int_0^{\infty} J e^{-\lambda t} \frac{a^n}{n!} t^n = \sum \frac{a^n J}{\lambda^{n+1}} = R(\lambda, a) J;$$

c'est vrai pour $|\lambda| \geq \|a\|$ et cette égalité entre fonctions analytiques se prolonge dans tout $\rho(a)$ [par exemple si $\|A(t)\| = 1$, pour tout $\lambda > 0$]; a non borné : S est uniformément borné pour $\mathcal{R}(\lambda) \geq \alpha + \varepsilon$ et

$$\lambda_{\eta} S(\lambda, a) f = \frac{1}{\eta} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\lambda t} (e^{\lambda \eta} - 1) A(t) f dt = \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} e^{-\lambda t} A(t) f dt \rightarrow -Jf + \lambda S_{\lambda} f,$$

donc

$$S_{\lambda} f \in \mathcal{O}(a) \quad \text{et} \quad (\lambda J - a) S_{\lambda} = J,$$

de même comme

$$f \in \mathcal{O}(a) \quad \text{entraîne} \quad \frac{d}{dt} A(t) f = a A(t) f = A(t) a f,$$

$$S_{\lambda} a f = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} A(t) f dt = \lambda S_{\lambda}, \quad S_{\lambda} (\lambda I - a) = I \quad \text{dans } \mathcal{O}(a) \subset J.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — On a d'ailleurs

$$\int_0^{\infty} e^{\lambda - t} A(t) dt [e^{\lambda} I - A(1)] = [e^{\lambda} I - A(1)] \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} A(t) dt = e^{\lambda} \int_0^1 e^{-\lambda t} A(t) dt$$

et dans le cas borné, la théorie spectrale redonne le résultat ci-dessus.

CHAPITRE II.

GÉNÉRATEUR D'UNE CHAÎNE SIMPLE CONSTANTE DE MARKOFF.

Comme il a été vu dans l'introduction, nous aurons dans ce cas :

a. $\|A(t)\| = 1$ pour tout t :

$A1 = 1$, c'est-à-dire que $f(x) = \text{const.}$ est par $A(t)$ transformée en elle-même;

$A'(t)p = p$, c'est-à-dire que l'opérateur adjoint $A^*(t)$ admet aussi le point $\lambda = 1$ dans son spectre ponctuel, la fonction $p(E)$ de $\mathcal{B}'$ étant une fonction propre correspondant à cette valeur;

b. $f(x) \geq 0$ entraîne Af partout ≥ 0 . C'est la condition principale, et la plus difficile à manier, propre au caractère probabiliste de notre problème.

FORMATION D'UN PROCESSUS DE MARKOFF À PARTIR DE $A(1)$. — Dans le cas fini, il est facile de former les chaînes les plus générales égales à $A(1)$ pour $t = 1$. Il reste ensuite à les déterminer pour qu'elles soient de type > 0 (cf. chap. IV).

Dans le cas général, une même méthode, mais de portée plus restreinte est applicable. On a $A(n) = A^n$, peut-on définir A^n ?

D'après la théorie spectrale, nous pourrions prendre $\int_C \lambda^{\frac{1}{n}} R_\lambda(A) d\lambda$,

C entourant Σ , dans $\rho(A)$, $\lambda^{\frac{1}{n}}$ étant une détermination uniforme et analytique sur un ensemble contenant Σ , soit :

a. Σ n'entoure pas 0 ;

b. 0 n'appartient pas à Σ , restriction peu importante, car, sous les hypothèses que nous ferons plus loin, 0 est un pôle si $\notin \rho(A)$. $A = JA = A$ et il existe C , ayant un inverse tel que $A = JC$. On opérera sur C au lieu d'opérer sur A .

On peut même prendre des déterminations variant suivant le spectral set de Σ envisagé; si les arguments extrêmes pris pour λ diffèrent au plus de $2N\pi$, on pourra représenter $\Sigma(A)$ sur une surface

de Riemann à $N + 1$ feuillets, la fermeture se faisant suivant un rayon issu de 0. Sur chaque feuillet, on contournera les spectrales sets (en nombre fini) choisis, et ceux-là seulement, chacun d'eux étant contourné une fois et une seule; alors la théorie de N. Dunford s'étend sans difficultés et $\left[\int_c \lambda^{\frac{1}{n}} R_\lambda d\lambda \right]^n = A$. Mais on n'obtient pas ainsi toutes les solutions possibles; en particulier, si $\lambda = \lambda_0$ admet plusieurs vecteurs propres [pour $A(1)$], ceux-ci peuvent correspondre à des $\lambda_0^{\frac{1}{n}}$ différents pour $A^{\frac{1}{n}}$ et la méthode ci-dessus ne permet pas de décomposer ainsi l'espace propre $E_{\lambda_0}(A)$ (cf. en particulier le cas fini au chapitre IV).

Ce choix des déterminations une fois fait, faisons tendre $\frac{1}{n}$ vers zéro, A^n tend uniformément vers I (le spectre se ramassant sur $\lambda = 1$). $A(t)$ se définit comme limite uniforme de $A\left(\frac{p}{q}\right)$; ceci revient d'ailleurs à prendre une détermination de $\log \lambda$ et définir $A(t)$ par e^{at} , $a = \int_c \log \lambda R_\lambda(A) d\lambda$ (cf. chap. I).

Il se pose alors le problème suivant, totalement irrésolu :

Sous quelles conditions $A(1) \geq 0$ peut, par le procédé ci-dessus, donner naissance à $A(t) \geq 0$, c'est-à-dire à un processus probabiliste de Markoff.

PROPRIÉTÉS DU GÉNÉRATEUR POUR $A(t)$ DE TYPE ≥ 0 . — Comme vu au chapitre I, nous supposons $A(t)$ mesurable au sens fort pour $t \geq 0$, ce qui entraîne la continuité de $A(t)f$ pour tout f et tout $t > 0$ et, en outre, que lorsque t tend vers zéro, $A(t)$ tend vers une limite J , au sens uniforme ou fort auxquels correspondent les deux cas qui nous occuperont par la suite; le cas uniforme et le cas de convergence forte.

Notons tout d'abord que $A1 = 1$, $A'p = p$ sont équivalents à $a1 = 0$, $ap = 0$.

$\gamma_1 A_{\gamma_1} = A(\gamma_1) - I$ correspond à

$$\begin{aligned} P(x, E, t) &\geq 0 & \text{si } x \notin E, \\ P(x, E, t) &= 1 - 0 & \text{si } x \in E, \end{aligned}$$

à la limite

$$af = \int \pi(x, dy) f(y) dy \begin{cases} \pi(x, E) \geq 0 & \text{si } x \notin E, \\ \leq 0 & \text{si } x \in E, \end{cases}$$

soit a de type diagonal, mais a n'est défini que dans $\mathcal{O}(a)$ et $\pi(x, E)$ que pour certains ensembles formant une famille $\mathcal{F}(a)$ appartenant à $B[\mathcal{O}(a) \subset J]$.

Dans le cas uniforme et où $J = I$, $\pi(x, E)$ est défini pour tout $E \in B$. Dans ce cas, démontrons quelques propriétés réciproques : est-il suffisant que a soit du type diagonal ?

Cas fini (d'un nombre fini d'états possibles) :

$$e^{at} = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} a^n \quad \text{ou} \quad p_{ij} = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} a_{ij}^{(n)};$$

tous les termes $a_{ij} \neq 0$ ont un module minimum ε et si r est la norme de a , les $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} a_{ij}^{(n)}$ sont bornés par $e^{rt} - 1 - rt$, donc (uniformément c'est-à-dire quels que soient i, j) plus petits que εt pour t assez petit, donc :

$a_{ij} \neq 0$: si $i \neq j$, p_{ij} a le signe de a_{ij} , soit $+$; si $i = j$, $p_{ij} = 1 - ta_{ij} + \dots$ est aussi > 0 pour t assez petit.

$a_{ii} = 0$ entraîne $a_{ij} = 0$ et $p_{ii} = 0$.

$a_{ij} = 0$: $j \neq i$, $a_{ij}^{(2)} = a_{ik}a_{kj}$ est ≥ 0 ; si > 0 , le premier raisonnement est valable ; si $a_{ij}^{(2)} = 0$, $a_{ij}^{(3)} = a_{ik}^{(2)}a_{kj}$, les termes $\neq 0$ sont $k \neq i, j$ et $a_{kj} \neq 0$, soit $a_{ik} = 0$, d'après $a_{ij}^{(2)} = 0$ et $a_{ik}^{(2)}$ n'a que des termes > 0 , donc $a_{ij}^{(3)} \geq 0$, et ainsi de suite ; le premier terme différent de zéro est > 0 et le raisonnement ci-dessus valable.

$\Lambda(t) \geq 0$, dans $(0, \varepsilon)$ entraîne $\Lambda(t) \geq 0$ dans $(0, \infty)$.

Mais ceci ne vaut plus dans le général, car $\sum_0^\infty \pi^{(n)}(x, \mathcal{E})$ borné par $t^2 K$ n'est pas $< t |\pi(x, \mathcal{E})|$ uniformément par rapport à $\mathcal{E}$, pour t assez petit.

Démonstration pour le cas dénombrable. — Le raisonnement ci-dessus

vaut pour démontrer que $p_{ii} \geq 0$ (car c'est 1 moins un terme de l'ordre de rt).

Soit maintenant $i_0 \neq i_f$

$$p_{i_0, i_f} = \sum_1^{\infty} \frac{t^n}{n!} \pi_{i_0, i_f}^{(n)}, \quad \pi_{i_0, i_f}^{(n)} = \sum \pi_{i_0, i_1} \pi_{i_1, i_2} \dots \pi_{i_{n-1}, i_f};$$

enlevons d'un terme < 0 de cette dernière somme un facteur < 0 , on obtient un terme > 0 de $\pi^{(n-1)}$ (car un terme $\pi < 0$ a ses deux indices égaux) et on les obtient tous, ce qui importe peu, une ou plusieurs fois, au plus n fois, car réciproquement, d'un terme ≥ 0 de $\pi^{(n-1)}$. On peut déduire n termes ≤ 0 de $\pi^{(n)}$ en le multipliant par π_{i_0, i_0} ou $\pi_{i_1, i_1}, \dots, \pi_{i_{n-2}, i_{n-2}}, \pi_{i_f, i_f}$ et l'on obtiendra ainsi certainement tous les termes ≤ 0 de $\pi^{(n)}$; si donc, nous posons $\pi^{(n)} = \alpha_n - \beta_n$, $\pi_1 = \alpha$, on a $\beta_n \leq nr\alpha_{n-1}$.

Or $\sum_j |\pi_{ij}| \leq r$ entraîne $\alpha_n \leq r^n$ et la série

$$\sum_1^{\infty} \frac{t^n}{n!} \pi^n = t\alpha_1 + \frac{t^2}{2!} \alpha_2 + \frac{t^3}{2!} \beta_2 + \dots + \frac{t^n}{n!} \alpha_n - \frac{t^n}{n!} \beta_n + \dots$$

étant absolument convergente, sa somme est celle de la série

$$\sum_1^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\alpha_n - \frac{\beta_{n+1}}{n+1} t \right)$$

bornée inférieurement par $\sum_1^{\infty} \frac{t^n}{n!} \alpha_n (1 - rt) \geq 0$ si $t < \frac{1}{r}$ (uniformément par rapport à i, j).

Ainsi

$$p_{ij} \geq 0$$

pour $t < \frac{1}{r}$ si $i \neq j$ et

$$t < \frac{\log r}{r}$$

pour $i = j$ [$p_{ii} \geq 1 - (e^{rt} - 1) = 2r - e^{rt}$], l'est quel que soit $t \geq 0$.

Pour généraliser cette démonstration, il faudrait définir pour $\pi^n(x, \mathfrak{S})$ une partie ≥ 0 et une partie ≤ 0 .

Soit $x \notin \mathcal{E}$. Si nous cherchons à définir $\alpha^{(n)}(x, \mathcal{E})$ et $\beta^{(n)}(x, \mathcal{E})$ par

$$\begin{aligned}\alpha^{(n)} &= \int_{\mathcal{C}(\mathcal{E})} \alpha^{(n-1)}(x, dy) \pi(y, \mathcal{E}) - \int_{\mathcal{E}} \beta^{(n-1)}(x, dy) \pi(y, \mathcal{E}), \\ \beta^{(n)} &= - \int_{\mathcal{E}} \alpha^{(n-1)} \pi + \int_{\mathcal{C}(\mathcal{E})} \beta^{(n-1)} \pi,\end{aligned}$$

$\mathcal{C}(\mathcal{E})$ étant le complémentaire de $\mathcal{E}$ dans Ω , nous voyons que, en admettant $\alpha^{(n-1)}$, $\beta^{(n-1)}$ définis, ainsi que ces intégrales, $\alpha^{(n)}$ et $\beta^{(n)}$ seraient des fonctions subadditives de $\mathcal{E}$ et non plus additives. La définition de ces intégrales est alors difficile, sauf peut-être dans certains cas particuliers; il faut toutefois remarquer que même s'il existe pour $\Lambda(t)$ une densité de probabilité, cela n'entraîne nullement que π se présente avec les mêmes propriétés de continuité.

On a

$$\begin{aligned}\alpha^{(n)}(\mathcal{E} + \mathcal{E}') &= \alpha^{(n)}(\mathcal{E}) + \alpha^{(n)}(\mathcal{E}') \\ &\quad - \int_{\mathcal{E}'} (\alpha^{(n-1)} + \beta^{(n-1)}) \pi(y, \mathcal{E}) - \int_{\mathcal{E}} (\alpha^{(n-1)} + \beta^{(n-1)}) \pi(y, \mathcal{E}'),\end{aligned}$$

pour $x \notin \mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, et même terme soustractif pour $\beta^{(n)}(\mathcal{E} + \mathcal{E}')$, puisque $\alpha^{(n)} - \beta^{(n)}$ est fonction additive de $\mathcal{E}$.

AUTRES PROPRIÉTÉS DE $\Lambda(t)$. — *Points du spectre de module* $= \|\Lambda\|$. — Soit une transformation linéaire bornée quelconque, Λ et $\|\Lambda\| = M$. Soit $C = \frac{\Lambda}{M}$. C est bornée par 1, quel que soit n . Soit $|\lambda| = 1$ et $\lambda \in \Sigma_p$ (spectre ponctuel); si λ est pôle d'ordre ν , nécessairement $\nu = 1$, car soit E_ν l'espace propre correspondant, $B = \lambda I - A$. On a $B^\nu E_\nu = 0$, $B^{\nu-1} E_\nu \neq 0$; il existe alors des f tel que $Bf = f_1 \neq 0$ ou $\Lambda f = \lambda f + f_1$, f et f_1 étant linéairement indépendants, alors $|\Lambda^n f|$ augmente indéfiniment avec n , ce qui est incompatible avec $\|C\| = 1$. La décomposition de E_ν , quand il est de dimension finie (ce qui est équivalent à E_ν de dimension finie), n'est autre que la réduction à une forme canonique de Jordan ⁽⁷⁾, et les matrices réduites de Jordan, itérées

(7) Cf. G. JULIA, *Introduction mathématique aux théories quantiques*, Gauthier-Villars, 1936 (1, p. 86) et A. TORTRAT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 638.

une infinité de fois, ne restent bornées que si elles se réduisent à I. Dans le cas contraire (rang infini), une décomposition telle que celle de Jordan ne vaut plus, mais on peut toujours séparer une infinité de chaînes finies (de longueur ν au plus), $f_1, \dots, f_p$, avec $Bf_p = f_{p-1}$, qui rendent impossible si $\nu > 1$ que C^n soit borné.

Ainsi un pôle ne peut être que d'ordre 1, s'il est sur le cercle de convergence. Ceci a été démontré dans bien des cas (*cf.* réf. citées, Yosida, Fortet, et aussi Fréchet, *Bull. des Sc. Math.*, 1934). Mais pour λ singulier, isolé sur $|\lambda| = M = \|A\|$, on peut seulement affirmer que si E_i est défini comme E_ν ci-dessus,

$$E_1 = E_2 = \dots = E_\nu \quad \text{aussi grand que soit } \nu.$$

$E_1 \neq 0$ si $\lambda \in \Sigma_p$; on sait aussi que $B^n f, f$ appartenant à l'espace propre E_λ tend vers zéro avec n plus vite que n'importe lequel ε^n , si petit que soit ε .

Dans le cas le plus général, on sait cependant qu'un point λ_0 du spectre appartenant à sa frontière c'est-à-dire limite de points de $\rho(A)$, est tel que $B_{\lambda_0} = \lambda_0 I - A$ est diviseur généralisé de zéro, c'est-à-dire qu'il existe des A_n de norme 1, $\in \mathfrak{A}$ (ayant un inverse) tels que $B_{\lambda_0} A_n \rightarrow 0$. On voit facilement que cette propriété est vérifiée pour le point isolé ci-dessus (*cf.* Hille, § 5. 13, 1).

Dans le cas de M. Fréchet de la référence ci-dessus, où l'on suppose Ω borné (dans un espace à k dimensions) et l'existence d'une densité de probabilité dont l'une au moins des itérées est bornée, λ ne peut être, s'il appartient à Σ_p , que pôle, comme le démontre l'auteur (et c'est alors une racine de l'unité).

Mais d'autres restrictions s'ajoutent lorsque $A(1)$ appartient à une chaîne de Markoff continue $A(t)$.

Racines imaginaires pures de a. — Dans tous les cas (à ma connaissance) où il est question des λ de module 1, les auteurs sont amenés à démontrer que ces nombres sont racines de l'unité. Or, si les hypothèses faites valent pour deux valeurs de t incommensurables, t et kt (k irrationnel), et si $e^{i\theta}$ est racine (du spectre ponctuel) pour $A(t)$, $e^{ik\theta}$ l'est pour $A(kt)$; θ et $k\theta$ ne pouvant être à la fois des multiples rationnels de π , de telles racines ne peuvent exister. Mais la plupart du temps

il est bien difficile de savoir si $\Lambda(t)$ satisfait aux hypothèses faites quel que soit t , puisqu'en général $\Lambda(t)$ n'est pas mathématiquement défini à partir de $\Lambda(1)$, par exemple, et qu'on s'est surtout occupé de $\Lambda(n)$; en les faisant, on peut affirmer, par exemple dans les conditions de M. Fréchet ou de Doblin (réf. citée) que les valeurs propres de module 1 n'existent pas.

Voici une démonstration qui s'applique à des conditions à la fois moins et plus restrictives :

Dans les conditions générales de ce chapitre, nous supposons :

$\Lambda(t)$ converge uniformément vers J . Alors il n'existe pas de fonction propre f , avec $|\lambda| = 1$, atteignant sa borne supérieure en un point de Ω ($\lambda \neq 1$, bien entendu).

Il revient au même d'écrire que $a = \lim_{t_i} \frac{\Lambda(t_i) - 1}{t_i}$ admet la même fonction propre avec λ imaginaire pure. Soit M le maximum de $|f(x)|$. Décomposons l'aire du cercle $|z| < M$ du plan complexe en parcelles dont le nombre augmente indéfiniment tandis que leur aire tend vers zéro (ainsi que leurs dimensions), lorsque $n \nearrow \infty$: $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ sont les ensembles de Ω où f prend respectivement des valeurs comprises dans chacune de ces parcelles, la valeur maximum $M = z^0$ (qui peut toujours être supposée réelle > 0) étant atteinte dans $\mathcal{E}_0$ en x_0 . $\mathcal{E}_i$ est mesurable (d'après nos hypothèses générales) et désignant par $p_{\gamma_i}(x_0, \mathcal{E}_i)$: $P(x, \mathcal{E}_i, \gamma_i)$ pour $i \neq 0$ et $P(x, \mathcal{E}_i, \gamma_i) = 1$ pour $i = 0$, on a

$$\lambda M = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\gamma_i \rightarrow 0} \frac{|p_{\gamma_i}(x_0, \mathcal{E}_i)|}{\gamma_i} = M + [G(n, \gamma_i)],$$

$G(n, \gamma_i)$ désignant le centre de gravité des points $z_1, \dots, z_n$, pris à l'intérieur des n parcelles (sauf celle contenant $M = z_0$), affectés des poids $p_{\gamma_i}(x_0, \mathcal{E}_i)$ ($i = 1, \dots, n$), car

$$\sum_{i=1}^n p_{\gamma_i}(x_0, \mathcal{E}_i) = -p_{\gamma_0}(x_0, \mathcal{E}_0) = |p_{\gamma_0}(x_0, \mathcal{E}_0)|.$$

Or λ devrait être imaginaire pure $\neq 0$, donc aussi la limite de

$$[G(n, \eta) - M] = \overrightarrow{MG}.$$

Or G est intérieur au cercle, ou au plus sur la circonférence et $|MG| \rightarrow 0$ si l'argument tend vers $\frac{\pi}{2}$, alors $\frac{|p_\eta|}{\eta}$ augmente indéfiniment. Ceci est possible dans le cas de convergence forte de $A(t)$ vers J , mais non dans le cas uniforme où la limite $\pi(x_0, \mathcal{E}_0)$ est borné d'après le théorème de Hille sur l'existence d'un générateur borné.

Cette démonstration suppose nécessairement que la borne supérieure

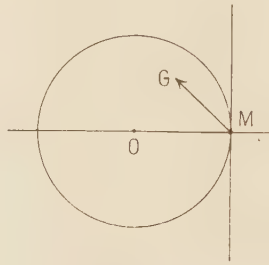


Fig. 1.

soit atteinte. C'est le cas si Ω est borné et avec certaines hypothèses de continuité. Dans le cas fini, cette même démonstration prend une forme bien simple et le résultat est d'ailleurs implicitement exprimé (p. 250-251 du livre de M. Fréchet), où il est observé que l'expression des $p_{ij}(n)$ n'est pas sinusoïdale, sans dire explicitement que cela entraîne que la racine correspondante de l'équation en s , de module 1, ne peut exister.

L'étude de la fonction de corrélation et la propriété que celle-ci soit une fonction caractéristique nous donnerons plus loin d'autres propriétés des λ de module 1, dans le cas où ils existent.

Nous donnerons aussi plus loin un exemple, dans le cas fini, montrant qu'il n'est pas suffisant que $A(1)$ n'ait pas de racines de module 1 différentes de 1 pour que $A(t)$, défini comme indiqué au début soit ≥ 0 [comme $A(1)$].

CHAPITRE III.

FONCTIONS DE CORRÉLATION, CAS GÉNÉRAL.

Avec les notations du chapitre précédent, la probabilité pour qu'au temps t_0 , se produise l'événement x , et qu'au temps $t_0 + t$, l'événement appartienne à l'ensemble E de Ω , est

$$p(x) P(x, E, t),$$

la fonction de corrélation $\rho(t)$ est la moyenne de $X(t_0)X^*(t_0 + t)$, soit

$$\int f(x) p(dx) P(x, dy, t) f^*(y) = (Af, g) \quad [A = A(t)],$$

$f(x)$ est la fonction des valeurs prises par X sur Ω . Il y a intérêt à bien la distinguer de l'opérateur A dans la donnée du processus, car la structure de la chaîne ne dépend vraiment que de ce dernier, et l'on passe facilement d'une fonction $f(x)$ à une autre, sans changer, si f est arbitraire, les propriétés de la fonction de corrélation.

(Af, g) est le produit scalaire de Af et de g avec $Af \in \mathcal{B}$ comme f , $g \in \mathcal{B}'$. Ici

$$g(dx) = f(x) p(dx),$$

p peut être considéré comme un opérateur multiplicatif (différent de ceux précédemment considérés), opérant aussi bien dans $\mathcal{B}'$ que $\mathcal{B}$, mais transformant $\mathcal{B}$ en une partie de $\mathcal{B}'$. On voit comment $\rho(t)$ est liée à A , mais ceci apparaîtra beaucoup mieux si nous cherchons la fonction de répartition $F(x)$ dont elle est la fonction caractéristique

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x).$$

$\rho(t)$ est ici une fonction continue pour tout $t > 0$ [$A(t)$ converge au moins fortement, par hypothèse] $\rightarrow 0$ si $A(t) \rightarrow J \neq I$ quand $s_i \neq 0$, $\rho(t)$ ne tend vers 1 que si f satisfait à $(If, g) = (f, g) = 1$; [nous supposons f normée, c'est-à-dire $\overline{|f|^2} = \int p(dx) |f(x)|^2 = 1$]. C'est dans ce cas seulement que $F(x)$ est une fonction de répartition au

sens propre c'est-à-dire que dans le cas contraire une partie des masses distribuées sur $-\infty, +\infty$ est rejetée à l'infini $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) < 1 \right]$.

PROPRIÉTÉS CONNUES DES FONCTIONS DE CORRÉLATION. — Noter que $\varphi(-t) = \varphi(t)^*$.

1. (Bochner.) Toute $\varphi(t)$ continue à l'origine est fonction caractéristique c'est-à-dire transformée de Fourier d'une fonction de répartition.

2. (M. Kampé de Fériet, Colloque de juin-juillet 1948.) $\varphi(t)$ est la transformée de Fourier de la mesure de Radon $|\overline{E_t X}|^2$, soit

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} d|\overline{E_t X}|^2, \quad \text{avec} \quad X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} dE_t X,$$

ce qui donne à nouveau le théorème de Bochner.

Ce résultat est obtenu en utilisant la représentation de M. Paul Lévy en fonction d'une seule variable uniformément répartie. Mais cette méthode ne permet absolument pas, semble-t-il, de caractériser un processus de Markoff par rapport aux processus quelconques.

3. (Slutsky, Colloque de Genève, 1937, Hermann, *Actualités*, n° 738.) Si $X(t)$ est stationnaire d'ordre 2 et $\varphi(t) \rightarrow 1$ si $t \rightarrow 0$, ainsi que $\overline{X^2}(t)$ borné, on peut décomposer $X(t)$, rapportée à sa valeur moyenne, en :

une fonction presque périodique correspondant à la partie discontinue du spectre de Fourier de $\varphi(t)$;

une fonction à spectre continu *en moyenne*.

Nous verrons que dans le cas, pourtant beaucoup plus restreint, de Markoff et strictement stationnaire, la séparation d'une partie discontinue et d'une partie continue (mais plus au sens stochastique) n'est pas possible sans autres hypothèses.

RECHERCHE DU SPECTRE DE $\varphi(t)$. — Plaçons-nous dans le cas fortement convergent et $J \neq I$.

Supposons que les points $\lambda \in \Sigma[\Lambda(t)]$ ou Σ_t spectre de $\Lambda(t)$, de module 1 soient des pôles, et que, de plus, les points de $\sigma(a)$ qui leur correspondent, sur l'axe imaginaire soient en nombre fini k (car si a n'est pas borné, ils pourraient être en nombre infini). Ils forment les deux « spectral sets » σ_2 et $e^{a_2 t} = \Sigma_2(t)$ auxquels correspondent le même espace propre $E_2 = J_2 \mathcal{R}$ formé des vecteurs propres, car les pôles sont d'ordre 1.

On a

$$\Sigma_2 = e^{i\alpha_1 t}, \dots, e^{i\alpha_k t}, \quad \sigma_2 = i\alpha_1, \dots, i\alpha_k, \quad J_2 = \sum_{j=1}^k \mathcal{J}_j.$$

D'après le chapitre I, (demi-groupes, 2) :

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \Lambda_1(t) + \Lambda_2(t), & I &= J_1 + J_2, \\ \Lambda_1(t) &= J_1 \Lambda(t) = \Lambda(t) J_1, & J_2 J &= J J_2 = J_2, \end{aligned}$$

$J_2 \perp J_1$ entraîne $J_2 \perp \Lambda_1(t)$, mais

$$\Lambda_2(t) = \sum_{j=1}^k \mathcal{J}_j e^{i\alpha_j t}, \quad \text{donc} \quad \Lambda_2(t) \perp \Lambda_1(t)$$

et de

$$\Lambda(s) \Lambda(t) = \Lambda(s+t) \quad \text{et} \quad \Lambda_2(s) \Lambda_2(t) = \Lambda_2(s+t)$$

résulte

$$\Lambda_1(s) \Lambda_1(t) = \Lambda_1(s+t).$$

Ainsi $\Lambda_1(t)$ constitue un demi-groupe de générateur a_1 et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Lambda_1(t) = J = J_1 = J_1 J$$

SPECTRE DE $\Lambda_1(t)$. — Soit $\Lambda_1 = \Lambda_1(1)$. $\Sigma_1(1)$, spectre de Λ_1 , est entièrement intérieur au cercle de rayon 1, donc situé dans $|\lambda| \leq 1 - 2\varepsilon$

$$R_\varepsilon(\Lambda_1) = \frac{I}{\varepsilon} + \frac{\Lambda_1}{\varepsilon^2} + \dots + \frac{\Lambda_1^n}{\varepsilon^n} + \dots$$

qui représente la résolvante de Λ_1 au voisinage de $\lambda = \infty$, est convergente (toujours au sens de la convergence uniforme des opérateurs, pour $|\lambda| \geq 1 - \varepsilon$, mais alors (cf. R. Fortet, réf. citée,

section II, chap. I) la norme du terme général est bornée, et il existe M et M' tels que

$$|X_n| \leq M(1 - \varepsilon)^n \quad \text{ou} \quad |X_n| \leq M(1 - \varepsilon)^{n/2} \quad (2 \leq n).$$

D'où

$$S(x, y) = \int_0^1 \varphi(t) A_n(t) dt$$

est bien défini pour $|x| < \rho$, et S est la résolvante de a_1 , dans $|x| < \rho$, d'où, puisque (cf. chap. I)

$$S(x, y) = R(\lambda, x) J J,$$

Pour

$$|x| < \rho, \quad |y| < \rho,$$

on a, d'après la formule d'inversion de M. Paul Levy,

$$S(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} S(\lambda, x) S(\lambda, y) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} A(\lambda) d\lambda.$$

Comme on a vu que $\rho > 0$, on a

comme intégrale de la dérivée sous le signe $\int$ dans T_ρ ,

$$S(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} A(\lambda) d\lambda$$

converge uniformément par rapport à x dans $(-\rho, +\rho)$, cette dérivée est continue et $S(x, y)$ admet partout une dérivée

$$S'(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} A'(\lambda) d\lambda$$

l'expression de $S'(x, y)$ est

$$S'(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} A'(\lambda) d\lambda$$

Soit les $2n$ points réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ sur $(0, \infty)$, comme points singuliers de la racine de la dérivée

$$S'(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} A'(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{A'(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

Remarques préliminaires. — Comme dans l'exemple des arts 2 et 3 de l'introduction et au début de ce chapitre, p représente l'opérateur comme opérateur multiplicatif, la formule 6 des opérations linéaires qui transforment $\mathcal{B}$ en une partie de $\mathcal{B}$.

Alors qu'on peut définir l'opérateur A' de $\mathcal{A}$, comme opérateur dans $\mathcal{B}'$, on peut définir l'opérateur T' de $T \in \mathcal{B}$ comme un opérateur de même type (de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$) par la formule :

$$T'f(x) = f(Tx) \quad (f \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{B})$$

tandis que pour $\mathcal{A}$, on a

$$(T'f)(x) = (A'f)(x) = f(Ax) \quad (f \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{B})$$

On a $(TA)' = A'T'$, car

$$(TA)'f(x) = f(TAx) = f(A'Tx) = (A'T')f(x) \quad (f \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{B})$$

(Tf, f) réel entraîne T hermitien ($T = T'$), d'où il résulte que A est réel dans $\mathcal{B}$, car, remplaçant f par $f + g$, on a en même temps

$$(Tf, f) = (Tg, g) \quad \text{pour} \quad (f, g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$$

et remplaçant f par if

$$-(Tf, g) = (Tg, f) \quad \text{marquant par ex.} \quad 2. (Tf, g) = 2(Tg, f) = 2(f, Tg)$$

d'où

$$(Tf, g) = (f, Tg) \quad (f, g \in \mathcal{A})$$

En particulier, si J est projecteur dans $\mathcal{B}$, il est hermitien J dans $\mathcal{B}$ défini par $(Jg, f) = (g, Jf)$: à une décomposition orthogonale de I dans $\mathcal{B}$ correspond une décomposition orthogonale de I dans $\mathcal{B}'$. Si $I = J_1 + J_2$, $J_1 g = 0$, quel que soit g pour une $f \in \mathcal{B}$.

Revenons maintenant à (2) : pour $x = z$, l'opérateur se peut caractériser que si le produit (Jf, g) est imaginaire pur ou (f, pJf) réel ($g = pf$) et ceci doit être vrai, quel que soit $f \in \mathcal{B}$ (car f détermine une partie des puissances de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est hermitien et égal à Jp).

Or J , comme J_1 , est orthogonal à J , et A , donc

$$Jp = -pJ \quad \text{pour} \quad p \in \mathcal{B}$$

entraîne $A' \mathfrak{F}' = \lambda \mathfrak{F}'$ (A' est l'adjoint de A , mais réduit à l'opérateur induit par ce dernier dans $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}^*$, c'est pourquoi nous ne notons pas A^*). Par suite, $\mathfrak{F}' \mathfrak{B}'$ est engendré par les vecteurs propres de A' pour $\lambda = e^{-i\alpha}$.

Donc, p , par multiplication, transforme tout vecteur propre ($|\lambda| = 1$) de $A(t)$ en un vecteur propre de l'opérateur A' associé dans $\mathfrak{B}'$ pour la valeur λ conjuguée de λ , cette correspondance respectant la structure fine de A , c'est-à-dire valable quel que soit t et aussi bien pour les points de $\sigma(a)$ situés sur O_V . La correspondance n'est biunivoque que si $p.f = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathfrak{F} \mathfrak{B}$. Ceci est vrai, en particulier, pour $\lambda = 1$, p étant vecteur propre de A' pour $\lambda = 1$ et ces conditions imposent des restrictions supplémentaires quant à $A(t)$ (s'il possède des pôles pour des $\lambda \neq 1$ et de module 1).

Calculons maintenant $F_2(x)$

$$F_2(x) - F_2(0) = \sum \frac{1}{\pi} (\mathfrak{F}_i f, g) \int_0^{\infty} \Re e^{i2it} \frac{1 - e^{-itx}}{it} dt;$$

puisque

$$\frac{1}{\pi} \Re \int_0^{\infty} \frac{e^{i2it}}{it} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2} \quad \text{pour } x > 0,$$

$$-\frac{1}{2} \quad \text{pour } x < 0, \quad 0 \quad \text{pour } x = 0,$$

nous obtenons comme coefficient de $(\mathfrak{F}_i f, g)$

$$1 \quad \text{si } 0 < x < x_0, \quad -1 \quad \text{si } x < x < 0,$$

$$0 \quad \text{si } x(x - x_0) > 0, \quad \pm \frac{1}{2} \quad \text{pour } x = 0 (x > 0).$$

Mais si nous ajoutons

$$F_2(0) = F_2(0) - F_2(-\infty) = \sum u_i (\mathfrak{F}_i f, g),$$

avec

$$1 \quad \text{si } x < 0, \quad \frac{1}{2} \quad \text{si } x = 0, \quad 0 \quad \text{si } x > 0,$$

nous obtenons

$$F_2(x) = \sum \hat{\varepsilon}(u) u_i (\mathfrak{F}_i f, g),$$

où $\hat{\varepsilon}(u)$ est nul pour $u < 0$ et égal à 1 pour $u > 0$.

D'ailleurs,

$$\phi(x - \alpha) = \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{it - \lambda} \quad (\lambda = i\alpha)$$

$$\left[\text{c'est aussi } \frac{\frac{\pi}{2} + \text{Arg}(ix - i\alpha_i)}{\pi} \right] \text{ et}$$

$$\sum \frac{\mathcal{J}_i f}{ix - i\alpha_i} = R(a, ix) J_r f,$$

d'où

THÉORÈME :

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}[R(a, ix) J f, g] dx, \quad \rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iur} dF(x),$$

lorsque $x = \alpha_i$, on a un point de la partie discontinue du spectre et la signification de cette expression est celle qui vient d'être donnée : R n'est pas définie, mais l'intégrale de sa partie réelle existe, c'est $\mathcal{J}_i$ multiplié par un argument qui subit la discontinuité π au passage par α_i , $\lambda = i\alpha_i$ étant pôle de a . Rappelons les hypothèses faites : $A(t)$ converge uniformément ou fortement vers J , quand t tend vers zéro, est mesurable au sens fort pour $t \geq 0$, et sur l'axe Oy le générateur a n'a qu'un nombre fini de points singuliers isolés, pôles de la résolvante; f est la fonction des valeurs sur Ω et $g(dx) = p(dx) f(x)$, $p(E)$ étant la mesure de probabilité sur Ω .

PROPRIÉTÉS DE $F(x)$. — Sous les hypothèses faites la fonction de répartition $\left[\text{au sens large puisque comme déjà vu, si } J \neq 1, \right.$
 $\rho(t)$ n'étant pas forcément continue en 0, $\int_{-\infty}^{+\infty} dF(x)$ peut être < 1 $\left. \right]$, se compose d'une partie continue, qui est ici dérivable et analytique et d'une partie purement discontinue.

• Pour cette dernière, ses propriétés sont simples; cependant la possibilité d'une forme arbitraire à cette partie reste problématique et liée, comme nous l'avons vu, à l'existence des racines du module 1.

Quant à $F_1(x)$, analytique sur $(-\infty, +\infty)$, elle définit une fonction $F(\lambda)$, analytique [se réduisant à $F_1(x)$ pour $\lambda = ix$], régu-

lière dans tout le demi-plan $\Re(\lambda) \geq -\varepsilon$. Les propriétés de F_1 sont liées de très près à celles de R_1 , c'est-à-dire, nous plaçant dans l'espace $J_1 \mathcal{B}$, et notant R au lieu de R_1 (Hille 3, 8-9)

$$(3) \quad R_\lambda - R_\mu + (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu = 0 \quad (\text{déjà citée}).$$

Dans le cas a borné, on a réciproquement :

Toute solution de (3) (dans l'algèbre $\mathcal{A}$ des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{B}$), quels que soient λ et μ dans un certain domaine D du plan complexe, et si elle est régulière (c'est-à-dire admet un inverse) pour au moins une valeur $\lambda_0 \in D$, est résolvante d'un élément A de $\mathcal{A}$.

On a

$$\lambda = \lambda_0 I + [R(\lambda_0)]^{-1}$$

ou cette forme équivalente : R_λ a pour développement au voisinage de tout point où elle est bien définie

$$R_\lambda = \sum_0^\infty (\lambda_0 - \lambda)^n A^{n+1} \quad (A \in \mathcal{A} \text{ et } A \text{ a un inverse}),$$

donc la densité du spectre $[F_1(x) = \varphi(x) dx]$ est

$$(4) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \sum_0^\infty (ix_0 - ix)^n (A^{n+1} Jf, g);$$

$\varphi(x)$ est, en outre, assujetti à être ≥ 0 et le problème réciproque peut se poser ainsi : $\varphi\left(\frac{z}{i}\right)$ étant analytique et régulière dans $\Re(z) \geq -\varepsilon$, existe-t-il un opérateur $A \in \mathcal{A}$ et une fonction $f \in \mathcal{B}$ (g est alors déterminé) tels que les coefficients du développement (4) égalent les $(A^{n+1} f, g)$? C'est, du moins, le premier problème à résoudre; il faut ensuite chercher à obtenir une chaîne ≥ 0 correspondant à notre problème de probabilités.

Exemple du mouvement brownien (M. Paul Lévy, Gauthier-Villars, 1948). — D'après les pages 15 et 16, on a

$$P_{x_1} [X(t+h) = X(t) + x \mid X \leq h] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, \quad \varphi(h) = \sqrt{\frac{t}{t+h}}.$$

Posons $t = e^{2\theta}$,

$$X(t) = e^\theta Y(\theta), \quad \frac{X(t+h) - X(t)}{\sqrt{h}} = \frac{Y(\theta') - e^{-(\theta' - \theta)} Y(\theta)}{\sqrt{1 - e^{-2(\theta' - \theta)}}}$$

suit une loi réduite de Laplace.

Remplaçant $\theta' - \theta$ par t , on a pour $Y(t)$

$$\begin{aligned} P(x, y, t) &= \text{Pr} \{ Y(t_0 + t) = y / Y(t_0) = x \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2 + e^{-t}x^2}{2(1 - e^{-t})}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1 - e^{-2t}}} \quad (\rho = e^{-t}), \end{aligned}$$

l'opérateur $A(t)$ est alors

$$A(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} f(z\sqrt{1 - e^{-2t}} + e^{-t}x) dz.$$

Prenons pour espace $\mathcal{B}$ celui des fonctions continues f sur $(-\infty, +\infty)$ telles que $e^{-\frac{x^2}{2}}f$ soit de carré sommable, la norme étant $\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} |f|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$; ces fonctions forment un espace de Hilbert.

Or $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - \theta x)^2}{2(1 - \theta^2)}}$ est le noyau de la transformation intégrale qui admet pour fonctions propres les polynômes d'Hermite dérivés de $e^{-\frac{x^2}{2}}$, soit donnés par

$$e^{-\frac{x^2}{2} + hx} = \sum \frac{h^n}{n!} H_n(x) \quad (\text{cf. formule de Mehler}),$$

on a $A(t)H_n(x) = e^{-nt}H_n(x)$ et si les $\varphi_n(x)$ sont les $H_n(x)$ normés,

$$f = \sum_0^\infty a_n \varphi_n \quad \text{devient} \quad Af = \sum_0^\infty a_n e^{-nt} \varphi_n(x).$$

$A(\eta) - I$ tend vers zéro si $n \rightarrow 0$, car c'est

$$[A(\eta) - I]f = \sum a_n (1 - e^{-n\eta}) \varphi_n,$$

mais non uniformément, car $\|A(\eta) - I\| = 1$; en effet, pour n assez grand $(A_\eta - I)\varphi_n = (e^{-n\eta} - 1)\varphi_n$ est aussi voisin de $-\varphi_n$ qu'on le désire. D'ailleurs, la borne inférieure de $A(\eta)$ est 0, $A(\eta)$ n'a jamais

d'inverse; o point d'accumulation des $\lambda_n = e^{-n\eta}$ du spectre ponctuel, appartient au spectre continu.

Le générateur a est tel que $a\varphi_n = -n\varphi_n$. Il n'est défini que pour $\sum n^2 a_n^2 < \infty$, donc dans un domaine de $\mathcal{B}$ dense sur $\mathcal{B}$, mais il n'est pas borné. On peut vérifier la formule exponentielle

$$A(t)f = \lim_{\eta \rightarrow 0} e^{A_\eta t} f, \quad A_\eta = \frac{1}{\eta} [A(\eta) - I],$$

car $e^{A_\eta t} \varphi_n(x) = e^{-\frac{n}{\eta} t} \varphi_n(x)$ et la limite forte résulte de

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left[e^{-nt} - e^{-\frac{1-e^{-n\eta}}{\eta} t} \right]^2 \rightarrow 0 \quad \text{avec } \eta \quad (\sum a_n^2 < \infty).$$

Corrélation. — Dans cet exemple, la fonction des valeurs est $f(x) = x$, c'est une fonction propre $\left[\lambda = \frac{1}{e} \text{ pour } A(1) \right]$, aussi $R(a, ix)f$ se réduit à $\frac{f}{ix+1}$ et $F(x)$ à $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, tandis que $\varphi(t)$ se réduit à $e^{-|t|}$. Si f n'est pas un polynome, son développement comporte une infinité de termes $\neq 0$, et $F(x)$ mettrait en évidence tous les points singuliers du spectre et les principales propriétés de structure de la chaîne $A(t)$; le processus serait apparemment, avec cette nouvelle échelle de mesure, bien différent du mouvement brownien, quoique il s'y ramène par une simple transformation.

CHAPITRE IV.

CAS FINI, EXEMPLES DIVERS, RÉCIPROQUES.

CONSTRUCTION DE TOUTES LES CHAÎNES POSSIBLES. — La forme générale de la solution se trouve dans le livre de M. Fréchet; nous allons en donner ici une expression plus précise.

Nous partons de $A = A(1)$. Le problème est de trouver $A(t)$ tel que $AA(t) = A(t+1)$, ou de trouver n vecteurs $r_i(t)$ vérifiant

$$(1) \quad A r_i(t) = r_i(t+1);$$

ce sont les colonnes de $A(t)$, du moins s'ils vérifient les conditions initiales, c'est-à-dire $r_i(1) = \text{colonnes de } A(A_{ji})$, mais une fois trouvés n vecteurs $r_i(t)$, une combinaison linéaire convenable donnera aussitôt la solution cherchée.

a. Supposons que A ait n vecteurs propres distincts $r_1, \dots, r_n$, correspondant aux valeurs propres $s_1, \dots, s_n$, dont plusieurs peuvent être égales. On a

$$A r_i = s_i r_i, \dots \quad \text{ou} \quad A r = r S,$$

les r_i étant les colonnes de la matrice r , s étant la matrice diagonale de termes $s_{ij} = s_i \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 0$ si $j \neq i$, 1 si $j = i$). Une fois A ramenée à ses axes sous la forme $r^{-1} A r = S$, la solution est immédiate, c'est si facile à définir $s_{ij}(t) = s'_i \delta_{ij}$ choisissant pour chaque s_i une détermination arbitraire; alors

$$A(t) = r S' r^{-1}$$

forme bien la chaîne que nous cherchions [les $r_i(t)$ définis plus haut sont ici les $s'_i r_i$]. Nous supposons le déterminant $|A| \neq 0$.

b. Supposons maintenant qu'il n'y ait pas n vecteurs r_i distincts (linéairement, bien entendu). Par exemple, s_1 est racine d'ordre p et il n'y qu'un vecteur propre r_1 ; alors $s'_1 r_1 = r_1(t)$ est solution de (1), il faut en trouver $p-1$ autres. Nous pouvons imaginer que l'on construise $A(\varepsilon)$ continu en ε et tendant vers A quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (ε n'ayant aucun rapport avec t), et que pour $\varepsilon \neq 0$, il y ait n racines de l'équation en S , et vecteurs propres distincts. On peut alors définir par des combinaisons linéaires des solutions $s'_i(\varepsilon) r_i(\varepsilon)$ de $A(\varepsilon) r_i(\varepsilon, t) = r_i(\varepsilon, t+1)$ des quantités qui, à la limite, nous donnent des dérivées par rapport à s .

Soit $p = 2$,

$$r_2 = \lim_{s_1 \rightarrow s_2} \frac{s'_1(\varepsilon) r_1(\varepsilon) - s'_2(\varepsilon) r_2(\varepsilon)}{s_1 - s_2} = \frac{d}{ds} s'_1(\varepsilon) r_1(\varepsilon) \quad \text{pour } \varepsilon = 0.$$

Supposons aussi que $\frac{d}{ds} r_1(\varepsilon)$ existe pour $\varepsilon = 0$, alors

$$A \left(\frac{d}{ds} s^t r \right) = \frac{d}{ds} (s^{t+1} r), \quad \text{d'où} \quad (A - s) \frac{dr}{ds} = r.$$

Plus généralement, le même calcul peut être fait par exemple, et pour ne pas compliquer, supposons $p = 3$ et

$$s_2(\varepsilon) = s_1 + \partial(\varepsilon), \quad s_3(\varepsilon) = s_1 + 2\partial(\varepsilon);$$

la troisième solution serait

$$\lim \frac{s'_1 r_1(\varepsilon) + (s_1 + 2\partial)' r_3(\varepsilon) - 2(s_1 + \partial)' r_2(\varepsilon)}{\partial^2(\varepsilon)} = \frac{d^2}{ds^2}(s' r).$$

On vérifie par récurrence que

$$(2) \quad (A - S) \frac{d^p r}{ds^p} = p \frac{d^{p-1} r}{ds^{p-1}},$$

car si (2) vaut pour $i \leq p-1$, de

$$A(s' r)^{(p)} = (s^{(p+1)} r)^{(p)} \quad [\text{l'indice entre } () \text{ étant un indice de dérivation}],$$

on tire en développant

$$\sum_{i=1}^p C_p^i (s')^{(i)} [s' r^{p-i} + (p-i) - i r^{p-i-1}] A s' r^{p-i} = \sum_{i=1}^p C_p^i (s^{(i+1)})^{(i)} r^{p-i} + s^{(p+1)} r^p,$$

d'où il ne reste que

$$(A - s) s' r^{p-1} + C_p^1 s' r^{p-1} = (p-1) s C_p^1 r^{p-1}.$$

C. Q. F. D.

Nous supposons ici que $r_2(\varepsilon)$ et $r_3(\varepsilon)$ tendent vers r_1 .

En général, les $p r_i(\varepsilon)$ tendent vers l'un ou l'autre des vecteurs propres de A , quand il y en a plusieurs. Ainsi nous voyons, si α_1 d'entre eux tendent vers r_1 , qu'il existe une chaîne de α_1 vecteurs vérifiant

$$\begin{array}{ll} (A - s_1) X_1 = 0 & \text{en posant } X_1 = r_1; \\ (A - s_1) X_2 = X_1 & X_2 = \frac{dr_1}{ds}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2 r_1}{ds^2}; \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots; \\ (A - s_1) X_{\alpha_1} = X_{\alpha_1-1} & X_{\alpha_1} = \frac{1}{(\alpha_1-1)!} \frac{d^{\alpha_1-1} r_1}{ds^{\alpha_1-1}} \end{array}$$

et il existe p vecteurs se répartissant en chaînes de cette nature, le nombre de chaînes étant le rang de s_1 c'est-à-dire le nombre de

vecteurs propres correspondants. L'ordre du pôle s_i est le plus grand des nombres α_i . Nous retrouvons la décomposition de Jordan des matrices finies dans le groupe projectif (*cf.* M. G. Julia, Réf. citée).

Ces différents vecteurs X_i forment la matrice r que nous cherchions et

$$\Lambda r = r \varpi,$$

ϖ est une matrice formée de la succession sur la diagonale principale des matrices réduites du type

$$\begin{vmatrix} s_1 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & s_1 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & s_1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & s_1 \end{vmatrix}$$

d'ordre α_i , n'ayant que deux diagonales (dont la principale) non nulles.

L'itération de la matrice ϖ nous est immédiate maintenant : une matrice partielle d'ordre α_i s'obtiendra en développant les

$$\frac{d^i(s^t r)}{ds^i} \frac{1}{i!} \quad (i \leq \alpha_i - 1),$$

suivant les

$$\frac{1}{i!} \frac{d^i r}{ds^i} = \Lambda_{i-1},$$

chacune formant une colonne de $\varpi(t)$.

En rapportant les indices à une matrice partielle, on a

$$\varpi_{ij}(t) = \text{coef. de } \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1} r}{ds^{i-1}} \quad \text{dans} \quad \frac{d^{j-1}(s^t r)}{ds^{j-1}} \frac{1}{(j-1)!},$$

soit

$$\begin{aligned} & \frac{(i-1)!}{(j-1)!} \frac{(j-i)!}{(i-1)! (j-i)!} t(t-1) \dots (t-j+i+1) s^{t-i-i} \\ & = \text{coef. de } s^{t-j+i} \quad \text{dans } (s+1)^t, \\ & \varpi_{ij}(t) = \frac{t(t-1) \dots (t-j+i+1)}{(j-i)!} s^{t-(j-i)} \quad (j \geq i), \end{aligned}$$

ne dépend que de $j-i$.

Soit

$$\begin{vmatrix} s^t & ts^{t-1} & \frac{t(t-1)}{2!} s^{t-2} & . & . \\ 0 & s^t & . & . & . \\ . & 0 & s^t & . & . \\ . & . & 0 & s^t & ts^{t-1} \\ . & . & . & 0 & s^t \end{vmatrix}.$$

On peut vérifier que

$$\varpi(t)\varpi(t') = \varpi(t+t'),$$

$\varpi(t)$ est ainsi la forme canonique d'une chaîne, déterminée de façon unique par la donnée des s_i , de leur ordre p_i de multiplicité, de leur rang r_i , de l'ordre de leur pôle ν_i , et des nombres de chaînes de longueur 1, . . . , 2, ν_i , leur total valant r_i .

Donc $r(t) = r\varpi(t)$ et la combinaison linéaire $r(t)\mu$ qui égale 1 pour $t = 0$ est

$$A(t) = r\varpi(t)r^{-1}.$$

Notons qu'une détermination de s^t doit être choisie pour chaque chaîne; il peut y en avoir autant pour une valeur s_i qu'il y a de vecteurs propres correspondants (rang r_i).

Partant d'une matrice $A(1)$ de probabilités, il reste uniquement à exprimer que $A(t) \geq 0$, ce qui conduit à des inégalités limitant le choix de la matrice r . A étant réel, les valeurs propres ainsi que les colonnes de r , sont deux à deux conjuguées s'il s'y introduit des valeurs complexes.

Soit

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

exemple de M. Fréchet (collection Borel, p. 109),

$$\Delta(s) = 1 - s^3, \quad s = \frac{i\sqrt{3} - 1}{2},$$

soit

$$r = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & s^2 \\ 1 & s^2 & s \end{vmatrix}.$$

Cherchons la décomposition de l'unité $I = J_1 + J_2 + J_3$ correspondant aux trois valeurs propres 1, $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ et $\frac{-i\sqrt{3}-1}{2}$, les

vecteurs propres étant $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ s^2 \\ s \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \frac{x+y+z}{3} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} 1 \\ s^2 \\ s \end{vmatrix},$$

$$\lambda + \mu = \frac{2x - y - z}{3}, \quad \lambda - \mu = \frac{y - z}{s - s^2} = i \frac{z - y}{\sqrt{3}},$$

$$\lambda = \frac{x - \frac{(1+z)}{2}}{3} + i \frac{z - y}{\sqrt{3}}, \quad \mu = \bar{\lambda},$$

$$A(t) = J_1 + s'J_2 + s^2J_3 = J_1 + e^{2i\pi(k_1 + \frac{1}{3})t}J_2 + e^{-2i\pi(k_2 + \frac{1}{3})t}J_3;$$

donc

$$A(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t-1}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t+1}{3} \right) \\ \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t+1}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t-1}{3} \right) \\ \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t-1}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t+1}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t}{3} \right) \end{vmatrix}$$

en faisant, par exemple, $k_1 = k_2 = 0$.

Pour t entier seulement la matrice est à termes ≥ 0 . Nous savions que cela ne pouvait avoir lieu pour t irrationnels, donc par continuité pour des t rationnels denses sur $(0, 1)$, puisque $A(t)$ a toujours des λ racines de l'unité.

Le générateur est

$$a = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \\ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix}.$$

Mais l'absence de λ de module 1 ne suffit pas pour que $A(t)$ soit ≥ 0 . Pour le voir, envisageons la discussion complète du cas $n=3$, avec les racines réelles 1, s , s' , $s < 1$, $s' < 1$.

Soit

$$r = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha' \\ 1 & \beta & \beta' \\ 1 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix},$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \beta\gamma' - \beta'\gamma, \\ b &= \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, \\ c &= \alpha\beta' - \alpha'\beta, \end{aligned} \right\} a + b + c = \Delta, \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$$A(t) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha' \\ 1 & \beta & \beta' \\ 1 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s' & 0 \\ 0 & 0 & s'' \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & b & c \\ \beta' - \gamma' & \gamma' - \alpha' & \alpha' - \beta' \\ \gamma' - \beta & \alpha - \gamma & \beta - \alpha \end{vmatrix},$$

soit encore

$$A(t) = \frac{1}{\Delta} \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + s' \begin{vmatrix} \alpha(\beta' - \gamma') & \alpha(\gamma' - \alpha') & \alpha(\alpha' - \beta') \\ \beta(\beta' - \gamma') & \beta(\gamma' - \alpha') & \beta(\alpha' - \beta') \\ \gamma(\beta' - \gamma') & \gamma(\gamma' - \alpha') & \gamma(\alpha' - \beta') \end{vmatrix} + s'' \begin{vmatrix} \alpha'(\gamma - \beta) & \alpha'(\alpha - \gamma) & \alpha'(\beta - \alpha) \\ \beta'(\gamma - \beta) & \beta'(\alpha - \gamma) & \beta'(\beta - \alpha) \\ \gamma'(\gamma - \beta) & \gamma'(\alpha - \gamma) & \gamma'(\beta - \alpha) \end{vmatrix} \right)$$

le $\frac{1}{\Delta}$ doit s'entendre en ce sens que tous les termes de A sont à diviser par Δ .

a, b, c doivent avoir le même signe, soit $+$ (dans le cas contraire on échangera α et α' , ..., ce qui revient à échanger s et s'). α, β, γ ne peuvent avoir tous le même signe, de même α', β', γ' .

Envisageons le groupe de solutions :

$$\alpha \leq 0, \beta \leq \gamma, \quad \beta' \leq \alpha' \leq 0, \gamma'.$$

nous aurons

$$\frac{\gamma'}{\gamma} \leq \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

$A(t)$ s'écrit aussi sous la forme

$$I + (s' - 1)_+ T + (s'' - 1)_+ T',$$

et nous devons écrire que les termes de ces deux dernières matrices, ajoutés, sont ≥ 0 pour les termes non principaux, et ≥ -1 pour ceux de la diagonale principale. Faisons $t = 1$, posons $\frac{1-s'}{1-s} = k$

$$\begin{aligned} |\alpha(\gamma' - \alpha')| - k \alpha'(\alpha - \gamma) &\geq 0, & \beta(\alpha' - \beta') + k |\beta'(\beta - \alpha)| &\geq 0; \\ |\gamma(\beta' - \gamma')| - k \gamma'(\gamma - \beta) &\geq 0, & \gamma(\gamma' - \alpha') + k |\gamma'(\alpha - \gamma)| &\geq 0 \end{aligned}$$

équivalent à

$$(3) \quad \begin{cases} \left| \frac{\beta(\alpha' - \beta')}{\beta(\beta - \alpha)} \right| \leq k \leq \left| \frac{\alpha(\gamma' - \alpha')}{\alpha'(\alpha - \gamma)} \right|, \\ \left| \frac{\gamma(\gamma' - \alpha')}{\gamma'(\alpha - \gamma)} \right| \leq k \leq \left| \frac{\gamma(\beta' - \gamma')}{\gamma'(\gamma - \beta)} \right|; \end{cases}$$

les termes de la diagonale, tels

$$\Lambda_{11} = 1 + \frac{s-1}{\Delta} \left(\alpha(\beta' - \gamma') - k |\alpha'(\beta - \gamma)| \right)$$

seront certainement ≥ 0 pour $(s-1)$ assez petit.

Mais pour que $A(t)$ soit ≥ 0 , quel que soit t , il faut et il suffit que les $\frac{dA_{ij}(t)}{dt}$ soient pour $t=0$, ≥ 0 si $i \neq j$, (ce qui entraîne ≤ 0 si $i=j$). Pour les premiers, nous aurons les mêmes inégalités que ci-dessus, mais en remplaçant k par $k' = \frac{Ls'}{Ls}$, et il est aisé de choisir les α tels que (3) soit vérifié par k et non par k' ($s' < s$ entraîne $k' > k$). Prenons, par exemple,

$$\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{vmatrix}, \quad p = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{vmatrix},$$

$$s' = \frac{1}{4}, \quad s = \frac{1}{2};$$

nous obtenons

$$A(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{vmatrix} + 2^{-t} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{vmatrix} + 4^{-t} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

$$A(1) = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{9}{16} \end{vmatrix}$$

$A_{12} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{3}{2^t} + \frac{2}{4^t} \right)$ est < 0 pour $\frac{1}{2} < 2^{-t} < 1$ ($0 < t < 1$). On aurait aussi bien pu choisir s et s' pour que A_{12} soit > 0 pour $t = 1$ et < 0 dans une partie de $(0, 1)$ seulement, attenante à 0. Nous pouvons donc affirmer que n'importe quelle matrice A de probabilités, n'appartient pas nécessairement à une chaîne continue de Markoff, même si $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de module égal à 1.

Cas $n = 3$, $s = s'$. — Avec les mêmes notations, nous avons maintent

$$\varpi(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^t & ts^{t-1} \\ 0 & 0 & s' \end{vmatrix}.$$

D'où

$$A(t) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + s^t |T| + s^t |T'| + ts^{t-1} \begin{vmatrix} \alpha(\gamma - \beta) & \alpha(\alpha - \gamma) & \alpha(\beta - \alpha) \\ \beta(\gamma - \beta) & \beta(\alpha - \gamma) & \beta(\beta - \alpha) \\ \gamma(\gamma - \beta) & \gamma(\alpha - \gamma) & \gamma(\beta - \alpha) \end{vmatrix},$$

ou encore

$$A(t) = s^t I + \frac{1-s^t}{\Delta} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \frac{ts^{t-1}}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha(\gamma - \beta) & \alpha(\alpha - \gamma) & \alpha(\beta - \alpha) \\ \beta(\gamma - \beta) & \beta(\alpha - \gamma) & \beta(\beta - \alpha) \\ \gamma(\gamma - \beta) & \gamma(\alpha - \gamma) & \gamma(\beta - \alpha) \end{vmatrix}$$

et le générateur

$$a = LsI + \frac{-Ls}{\Delta} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \frac{1}{s\Delta} \begin{vmatrix} \alpha(\gamma - \beta) & \alpha(\alpha - \gamma) & \alpha(\beta - \alpha) \\ \beta(\gamma - \beta) & \beta(\alpha - \gamma) & \beta(\beta - \alpha) \\ \gamma(\gamma - \beta) & \gamma(\alpha - \gamma) & \gamma(\beta - \alpha) \end{vmatrix}.$$

Il nous suffit d'écrire que les termes non diagonaux sont ≥ 0 (dans a), ce qui par exemple, sous les hypothèses $\Delta > 0$, $\alpha \leq 0 \leq \beta \leq \gamma$, se réduit à :

$$(4) \quad sL \frac{1}{s} \geq \frac{|\alpha(\beta - \alpha)|}{c}, \quad sL \frac{1}{s} \geq \frac{|\gamma(\alpha - \gamma)|}{b},$$

conditions réalisables si $\frac{|\alpha(\beta - \alpha)|}{c}$ et $\frac{|\gamma(\alpha - \gamma)|}{b}$ sont $< \frac{1}{e}$.

Pour $n > 3$, le problème se pose de façon analogue : exprimant

que les éléments non diagonaux A_{ij} du générateur sont ≥ 0 , on obtient des formes linéaires en $-Ls_i$, homogènes. Il faut choisir les r_{ij} de façon que les coefficients ne soient pas tous < 0 , on obtient alors des conditions analogues à (3) qui limitent les rapports des Ls_i entre eux, en même temps qu'elles imposent certaines inégalités aux r_{ij} . Ceci s'il existe n vecteurs propres; sinon $\varpi(t)$ n'est pas diagonale, les formes linéaires ci-dessus en Ls_i dépendront, en outre, de $\frac{1}{s_i}, \dots, \frac{1}{s_i^{\nu_i}}$, ν_i étant l'ordre du pôle Ls_i pour la résolvante $R(a, \lambda)$, et les conditions imposées sont plus restrictives pour les s_i .

Corrélations. — Ce qui va être dit pour le cas fini vaut aussi pour la portion de $\rho(t)$ qui dans le cas général, correspond à un sous-espace E_λ , λ étant pôle d'ordre ν de $R_\lambda(A)$, de rang fini (c'est-à-dire E_λ à un nombre fini de dimensions); lorsque le rang est infini et $\nu > 1$, nous avons déjà noté que, en général, la décomposition canonique de Jordan ne vaut plus (cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 638), on peut imaginer des cas où l'expression donnée ci-dessus de $\varpi(t)$ vaudrait pour des matrices de rang infini, et même dans le cas contraire, cette expression peut être valable appliquée à un vecteur particulier (ici f , fonction des valeurs prises par la variable aléatoire dans chacun des états possibles).

Au lieu de f , désignons par x_i la valeur de X pour le $i^{\text{ième}}$ état

$$\varphi(t) = x_i p_i r_{ik} \varpi_{kl}(t) r_{ij}^{-1} x_j^*.$$

Il est plus simple ici d'étudier ρ sous sa forme directe plutôt que son spectre de Fourier

$$(5) \quad \rho(t) = \sum P_u e^{-\lambda_u t}, \quad \lambda_u = L \frac{1}{s_u};$$

P_u est un polynome en t et en $\frac{1}{s}$, de degré au plus égal à $\nu_u - 1$ par rapport à chacune de ces variables, ν_u étant toujours l'ordre du pôle $-\lambda_u$ pour $R_\lambda(a)$. Le degré est effectivement celui-là pour un choix arbitraire des x_i .

Comme nous supposons

$$X = p_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \overline{X}^2 = p_i x_i x_i^* = 1,$$

on a

$$P_1 = 0 \ (\lambda_1 = 0), \quad \sum_u P_u(t=0) = 1.$$

P_u se présente d'ailleurs sous la forme

$$\sum_0^{v_u-1} C_{u,i} \frac{t(t-1) \dots (t-i+1)}{i! s_u^i},$$

forme sous laquelle peut se mettre tout polynome de degré $v_u - 1$ en t .

Nous allons essayer de poser sous une forme plus précise le problème réciproque :

Toute fonction $\rho(t)$ de la forme (5) est-elle fonction de corrélation d'un processus de Markoff à un nombre fini d'états possibles? [Bien entendu $\rho(t)$ est définie pour $t \geq 0$, $\rho(-t) = \rho^*(t)$ et nous supposons $|\rho(t)|^2 \leq 1$].

Posons

$$\sigma_k = x_i p_i r_i k, \quad \text{soit} \quad \sigma' = x' p r$$

(l'accent indique qu'on a transposé la matrice, ici le vecteur σ pris habituellement sous forme de colonne $Y' = X' A$ équivaut à $Y = A' X$).

Puis

$$\tau_k = r_{kj}^{-1} x_j^* \quad \text{ou} \quad \tau = r^{-1} x^*, \quad \text{soit} \quad x^* = r \tau.$$

nous avons

$$(6) \quad c_{ui} = \Sigma \sigma_k \tau_{k+i}, \quad l_u \leq k, \quad k+i \leq l_u + v_u - 1$$

et nous essayons $A(t)$ étant donnée, c'est-à-dire r et $\varpi(t)$ de déterminer les x_i , supposés inconnus de façon que $\rho(t)$ prenne la forme imposée à l'avance

$$\sum C_{ui} \frac{t(t-1) \dots (t-i+1)}{i! s_u^i} e^{-\lambda_u t} \quad (i \text{ variant de } 0 \text{ à } v_{u-1}).$$

Le premier problème est donc de résoudre (6) facile à expliciter en τ_k : remplaçons dans σ , x par $r^* \tau^*$

$$\sigma = r' p r^* \tau^*, \quad \sigma = \gamma \tau^*,$$

Soit

$$\Lambda(t) = \begin{vmatrix} \beta - \alpha s^t & -\alpha(1-s^t) \\ \beta(1-s^t) & -\alpha + \beta s^t \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{\beta}{\alpha} x_1 \quad \text{entraîne} \quad |x_1|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad |x_2|^2 = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

2. $n = 3$, $s = s'$. s est donc réel. Désignant par x, y, z les valeurs de X pour les trois états possibles. On a

$$\rho = s' + \frac{t s'^{t-1}}{\Delta^2} [(\Sigma a \alpha x) (\Sigma (\gamma - \beta) x^*)]$$

en nous reportant à l'expression déjà écrite dans ce cas particulier de $\Lambda(t)$.

Supposons $\Delta = 1$ (ou $a + b + c = 1$) et posons $T = \Sigma a \alpha x$, $\Sigma (\gamma - \beta) x^*$. Une restriction concernant s et T est imposée par la condition $\rho(t) \leq 1$. $\frac{d\rho}{dt} \leq 0$ pour $t = 0$ nous donne

$$T \leq s L \frac{1}{s}$$

et ceci entraîne

$$\rho(t) \leq s' \left(1 + t L \frac{1}{s} \right) = e^{-t L \frac{1}{s}} \left(1 + t L \frac{1}{s} \right) \leq 1.$$

Nous allons voir que ceci n'est pas suffisant, en cherchant à résoudre le problème réciproque dans le cas x, y, z réels (donc aussi T).

Construire un processus de Markoff à trois états possibles admettant la corrélation $\rho = s' + T t s^{t-1}$.

Pour résoudre le système

$$(8) \quad \begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \\ \Sigma a \alpha x \cdot \Sigma (-\gamma \beta) x = T, \end{cases}$$

posons comme plus haut

$$\begin{aligned} \sigma &= ax + by + cz, \\ \tau &= (\gamma - \beta)x + (\alpha - \gamma)y + (\beta - \alpha)z, \\ 0 &= ax + by + cz. \end{aligned}$$

et ajoutons

Le déterminant D de ce nouveau système vaut

$$\begin{vmatrix} a\alpha & b\beta & c\gamma \\ \gamma - \beta & \alpha - \gamma & \beta - \alpha \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b\beta & c\gamma \\ 0 & \alpha - \gamma & \beta - \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma a \alpha^2 = D,$$

d'où

$$D\sigma = \begin{vmatrix} \sigma & b\beta & c\gamma \\ \tau & \alpha - \gamma & \beta - \alpha \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = \alpha\sigma + bc(\gamma - \beta)\tau$$

et, portant dans (8), on obtient

$$D^2 = \Sigma a [\alpha\sigma + bc(\gamma - \beta)\tau]^2 = D\sigma^2 + abc\tau^2 \Sigma bc(\gamma - \beta)^2;$$

mais de $\Sigma a = 1$ et $\Sigma a\alpha = 0$, on tire

$$2 \Sigma a\alpha b\beta = - \Sigma a^2 \alpha^2,$$

donc

$$\Sigma bc(\gamma - \beta)^2 = \Sigma bc(\gamma^2 + \beta^2) + \Sigma a^2 \alpha^2 = \Sigma \alpha^2 (a - a^2) + \Sigma a^2 \alpha^2 = \Sigma a \alpha^2 = D,$$

soit $D = \sigma^2 + a b c \tau^2$ et, compte tenu de $\sigma\tau = T$,

$$abc\tau^4 - D\tau^2 + T^2 = 0,$$

résoluble si $T^2 \leq \frac{D^2}{4abc}$. Comme $T \leq s L \frac{1}{s}$, on a nécessairement dans le cas déjà examiné $\alpha \leq 0 \leq \beta \leq \gamma$,

$$(4') \quad \frac{D^2}{4abc} \leq \begin{cases} \frac{|x(\beta - \alpha)|^2}{c^2}, \\ \frac{|\gamma(\alpha - \gamma)|^2}{b^2}, \end{cases}$$

car, sans cela, on pourrait satisfaire à (4) et (4') avec $T \geq s L \frac{1}{s}$, ce qui serait absurde.

Restons tout d'abord dans le cas $\alpha \leq 0 \leq \beta \leq \gamma$. Posons

$$\frac{D^2}{4abc} = 0, \quad c_2 = \frac{|\gamma(\alpha - \gamma)|^2}{b^2}, \quad c_3 = \frac{|x(\beta - \alpha)|^2}{c^2},$$

$$z_3 = \frac{0}{c_3}, \quad z_2 = \frac{0}{c_2}, \quad y_1 = \sqrt{z_2 z_3};$$

Soit $\beta = k|\alpha|$, $\gamma = k'|\alpha|$. Supposons k, k' choisis, $k \leq k'$; de

$$b + c = 1 - a, \quad kb + k'c = a,$$

on tire

$$c = \frac{a(1+k) - k}{k' - k}, \quad b = \frac{k' - a(1+k')}{k' - k},$$

$$a + k^2b + k'^2c = a(1+k)(1+k') - kk'.$$

a étant choisi, donc b et c , on peut toujours en multipliant $\alpha, \frac{1}{\alpha'}$, $\frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\gamma'}$, par un même coefficient convenable, faire en sorte que $c_2 \leq \frac{1}{e}$, $c_3 \leq \frac{1}{e}$ (sauf à la limite, c'est-à-dire pour $b = 0$ ou $c = 0$, mais cela n'est pas gênant). a varie entre $\frac{k}{1+k}$ et $\frac{k'}{1+k'}$.

Posons encore

$$1+k=l, \quad 1+k'=l', \quad kk'=\tau, \quad all' - \tau = u, \quad \text{d'où} \quad \frac{bl}{cl'} = \frac{k' - u}{u - k},$$

u varie entre k et k' , et dans cet intervalle nous devons étudier le maximum de la plus petite des deux quantités z_2 et z_3 ; soit M ce maximum

$$y_1 = \frac{u^2}{4akk'l'} = \frac{u^2}{4k'(u+\tau)}, \quad y_1' = \frac{u(u+2\tau)}{4k'(u+\tau)^2}.$$

y_1 croît dans l'intervalle k, k' , de

$$y_1(k) = \frac{k}{4k'(1+k')} \quad \text{à} \quad y_1(k') = \frac{1}{4(1+k)}, \quad \text{donc} \quad M \leq \frac{1}{4(1+k)}.$$

Mais pour $z_2 = z_3$, soit

$$\frac{l}{c} = \frac{k'l'}{b} \quad \text{ou} \quad k' = \frac{k' - u}{u - k}, \quad u_1 = \frac{k'l}{l'} \quad (k \leq u_1 \leq k'),$$

nous avons

$$y_1 = \frac{l^2}{4l'(l+kl')} = \frac{1+2k+k^2}{4(1+k')(1+2k+kk')}.$$

valeur qui peut certainement être atteinte par $\frac{T^2}{\left(\begin{smallmatrix} sL & 1 \\ & s \end{smallmatrix}\right)^2}$, et qui si $k \rightarrow k'$,

tend vers $\frac{1}{4(1+k')}$. Pour $k = k'$, il faut reprendre le calcul ci-dessus :

$a = \frac{k}{1+k}$, b et c restent indéterminés, mais $z_2 = z_3$ entraîne $\frac{b}{c} = k$,
 $D = k$,

$$y_1 = \frac{1}{4(1+k)}.$$

Conclusion. — Dans ce cas $\frac{1}{sL\frac{1}{s}}$ ne peut dépasser $\frac{1}{2}$, l'approche
 d'aussi près que voulu pour $k = k'$ assez petit, et l'atteint dans le cas
 trivial $k = k' = 0$.

Remarque. — Comme déjà remarqué, $a, b, c \geq 0$ demandent
 que α, β, γ n'aient pas tous les trois le même signe; nous pouvons

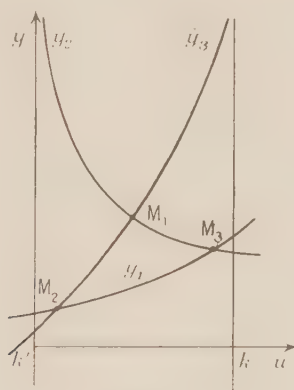


Fig. 2.

supposer qu'un seul d'entre eux est < 0 [dans le cas contraire, il
 suffit de changer tous les signes (de $\alpha, \alpha', \dots$)], soit α . Pour épuiser
 notre discussion, il suffit d'envisager maintenant le

Cas $\alpha \leq 0 \leq \gamma \leq \beta$, où $k' \leq k$. — Il faut alors ajouter aux conditions
 précédentes

$$sL\frac{1}{s} \leq \frac{|\beta(\gamma - 3)|}{a} \leq c\frac{1}{4}.$$

Posons donc $z_1 = \frac{\theta}{c_1}$,

$$\left. \begin{aligned} y_2 = \sqrt{z_1 z_3} &= \frac{D^2}{4 b k l \hat{o}} = \frac{u^2}{4 k (u - k')} \\ y_3 = \sqrt{z_1 z_2} &= \frac{D^2}{4 k k' l' c \hat{o}} = \frac{u^2}{4 k k' (k - u)} \end{aligned} \right\} \quad (\hat{o} = k - k').$$

M est toujours limité par le maximum du plus petit des trois nombres y_1, y_2, y_3 . u varie de k' à k .

Considérons y_2 ,

$$y_2 = y_1 \quad \text{pour} \quad k(u - k') = k'(u + \tau) \quad \text{ou} \quad u_3 = \frac{\tau l'}{\delta},$$

Si $u_3 \geq k$, la figure montre que notre méthode borne M par

$$y_1(k) = \frac{k}{4 k' (1 + k')},$$

ceci si

$$k'(1 + k') \geq k - k' \quad \text{ou} \quad k \leq k'(2 + k'), \quad l \leq l'^2.$$

Soit la borne maximum $\frac{2 + k'}{4(1 + k')} \leq \frac{1}{2}$; si $l \geq l'^2$,

$$y_2 = \frac{u(u - 2k')}{4k(u - k')^2}, \quad 2k' \leq k \leq u_3, \quad \text{donc} \quad y_2 \geq 0 \quad \text{pour} \quad u \geq u_2;$$

à partir de M_3 , y_2 croît jusqu'à

$$y_2(k) = \frac{k}{4(k - k')} \leq \frac{1}{2} \quad \text{puisque} \quad 2k' \leq k.$$

y_3 ne peut apporter aucune limitation supplémentaire.

Nous pouvons prendre comme valeur effectivement atteinte par z_1, z_2, z_3 à la fois, $y_1(u_1)$, lorsque

$$y_2(u_1) = y_3(u_1) = y_1(u_1),$$

car alors $z_2 = z_3 \leq z_1$, c'est-à-dire lorsque $u_2 \leq u_3$.

Or $k(k - u_2) = (u_2 + \tau)$ nous donne

$$u_2 = \frac{k \hat{o}}{1 + k}, \quad \text{donc} \quad \frac{k \hat{o}}{l'} = \frac{\tau l'}{\delta}$$

ou

$$(k - k')^2 \leq k'(1 + k + k' + kk') \quad k'(1 + 3k + kk') - k^2 \geq 0,$$

soit

$$(1 - k')(1 - 2k + k'k') - k' + 3kk' + kk'' - 2k - 1 - 1 - 2k + k' = P^2,$$

donc $\gamma_1(u_1) \leq \frac{1}{7}$, nous n'obtenons de pas valeur meilleure.

Donc, pour une chaîne à trois états possibles, la forme $s' + Ts'^2$ n'est possible pour la corrélation que si $T \leq \frac{1}{\sqrt{2}} s L \frac{1}{s}$. Nous pouvons construire des exemples où la valeur $\frac{1}{2} - \varepsilon$ est prise par $\frac{T}{s L \frac{1}{s}}$, si petit

que soit ε , dans des cas non triviaux, et n'affirmons pas que $\frac{1}{2}$ peut être dépassé (ceci exigerait une discussion plus compliquée). Ceci d'ailleurs ne résoudrait pas complètement le problème, car nous ne pouvons affirmer ici qu'il n'existe pas de processus de Markoff quelconque ou même à un nombre fini d'états possibles qui aurait la fonction de corrélation ci-dessus avec $T = s L \frac{1}{s}$ ou du moins $T > \frac{1}{\sqrt{2}} s L \frac{1}{s}$.

Citons enfin un exemple concret du cas à trois états étudié ⁽⁸⁾.

Soit $k = k' = 1$; prenant $b = c$, on a $a = \frac{1}{2}$, $b = c = \frac{1}{4}$, et, d'après (4),

$8\alpha^2 \leq \frac{1}{e}$; prenons

$$\alpha = -\frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \alpha' = \beta' = -\frac{5}{8}, \quad \gamma' = \frac{15}{8}, \quad s = \frac{1}{2},$$

$$A(t) = \begin{vmatrix} 2^{-t} + \frac{1}{2}(1 - 2^{-t}) & \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) + \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} & \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) - \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} \\ \frac{1}{2}(1 - 2^{-t}) & 2^{-t} + \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) - \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} & \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) + \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} \\ \frac{1}{2}(1 - 2^{-t}) & \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) - \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} & 2^{-t} + \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) + \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} \end{vmatrix}.$$

⁽⁸⁾ C'est, légèrement modifié, ce contre-exemple que j'avais indiqué à M. Paul Lévy, montrant que $\rho(t)$ n'est pas forcément de la forme $e^{-c|t|}$ (cf. P. LÉVY, *Processus stochastiques*, Gauthier-Villars, 1948). M. Paul Lévy m'a demandé de dire qu'il était d'accord avec moi sur ce sujet.

puis pour $\varphi(t)$, avec

$$2x + (x^2 - z^2) = 0, \quad 2x^2 + (x^2 - z^2) = 4,$$

$$T = -\frac{4x\sqrt{2}}{25}\sqrt{1-x^2}, \quad \rho(t) = 2^{-t} - \frac{4\sqrt{2}}{25}x\sqrt{1-x^2} \cdot 2^{-t}.$$

T est maximum pour $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et vaut $\frac{2}{25}$, tandis que $sL\frac{1}{s}$ est

$$\geq \frac{8}{25} = 0,32 \quad \left(\frac{1}{2}L2 = 0,34, \dots \right).$$

Remarque sur le cas $A(t) \rightarrow J \neq I$ quand $t \rightarrow 0$. — Utilisons, dans le cas fini, les résultats de l'étude de Doblin (déjà cité) sur les transitions instantanées : soient u_{ij} les termes de $A(+0) = J$. Les états $i_1, \dots, n$, se répartissent en groupes F, $G_1, \dots, G_1$, avec

$$u_{ij} = 0 \quad \text{si } j \in F, \quad u_{ij} = \delta_{ij} u_j \quad \text{pour } i \in I, j \in J,$$

I, J désignant les groupes indiqués et $J \neq F$

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i \in J} u_j = 1.$$

Les groupes G sont des groupes finaux de M. Fréchet et ils sont stochastiquement fermés ($\delta_{ij} = 0$ si $I \neq J$).

Les p_i satisfont à

$$p_j A_{ji} = p_i, \quad \text{avec } A_{ji}(t) = w_{ji} u_i \quad \text{si } i \notin F,$$

les $w_{ji}(t)$ étant les probabilités de passage du groupe J au groupe I dans le temps t ; les $\sum_{i \in J} p_j = q_j$ satisfont à

$$q_j w_{ji} = q_i$$

et la relation

$$A_{ij}(s) A_{jk}(t) = A_{ik}(s+t)$$

devient

$$w_{ji}(s) w_{jk}(t) = w_{jk}(s+t).$$

Les w et q constituent un processus markoffien, continu à l'origine, et la corrélation $\varphi(t)$ du processus originel vaut

$$x_i p_i A_{ij}(t) x_j^* = y_1 q_1 w_{ji}(t) y_j^*, \quad \text{avec } y_j = \sum_{i \in J} x_i u_i.$$

Pour $t > 0$, elle s'identifie avec la corrélation d'un processus continu, comme nous l'avions déjà remarqué; il y a une discontinuité à l'origine

$$\rho(0) = \sum_{i,1} q_i u_i |x_i|^2,$$

tandis que

$$\rho(+0) = \sum_i q_i |\sum u_i x_i|^2, \quad \rho(+0) \leq \rho(0),$$

car le premier terme tient compte des transitions instantanées possibles à l'intérieur d'un même groupe.

La même remarque vaut pour le cas dénombrable, auquel Doob a généralisé la valabilité des propriétés de décomposition en groupes instantanés (*Trans. Amer. Math. Soc.*, July 1942).

BIBLIOGRAPHIE.

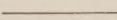
- DOBLIN, *Ann. de l'Éc. norm. sup.*, t. LVII, fasc. II; *Bull. des Sc. Math.*, 1938.
 DOOB, *Trans. Amer. Math. Soc.*, July 1942 et 1943.
 DUNFORD, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1943.
 FORTET, *Thèse (Revista de Ciencias, Lima, 1938)*.
 FRÉCHET, *Bull. des Sc. Math.*, 1934; *Recherches théoriques modernes*, collection Borel, p. 109, 250-251.
 HILLE, *Functional Analysis and semi-groups (Am. Math. Soc., Colloquium XXXI, § 3.8 et 3.10; ibid., § 5.14; ibid., chap. VIII, IX et XI)*.
 JULIA, *Introduction mathématique aux théories quantiques (Gauthier-Villars, 1936, 1, p. 86)*.
 KAMPÉ DE FÉRIET, Colloque de juin-juillet 1948.
 P. LÉVY, *Addition des variables aléatoires*, collection Borel, 1948, chap. II, § 10.
 LENGYEL et STONE, *Ann. of Math.*, 1936.
 SLUTSKY, Colloque de Genève, 1937 (*Actualités*, n° 738, Hermann).
 YOSIDA et KAKUTANI, *Ann. of Math.*, 1941.

DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTE.

Propriétés algébriques et arithmétiques
des anneaux de matrices.



Vu et approuvé :

Paris, le 1^{er} mars 1950.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

A. CHÂTELET.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

J. SARRAILH.

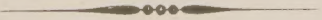


TABLE DES MATIÈRES.

LES FONCTIONS ORTHOGONALES D'HERMITE ET LES RELATIONS D'INCERTITUDE.

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I. — <i>Généralisation de la formule de Mehler et équations intégrales</i>	3
CHAPITRE II. — <i>Limitation du module des fonctions d'Hermite et équations aux dérivées partielles</i>	21
CHAPITRE III. — <i>Relations d'incertitude de Heisenberg et quadriques de dispersion</i>	34

LES PROCESSUS STRICTEMENT STATIONNAIRES DE MARKOFF ET LEURS CORRÉLATIONS.

SOMMAIRE	45
INTRODUCTION	47
CHAPITRE I. — <i>Opérateurs linéaires et demi-groupes</i>	52
CHAPITRE II. — <i>Générateur d'une chaîne simple constante de Markoff</i> ..	61
CHAPITRE III. — <i>Fonctions de corrélation, cas général</i>	69
CHAPITRE IV. — <i>Cas fini. Exemples divers, réciproques</i>	78
BIBLIOGRAPHIE	97

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

137042 Quai des Grands-Augustins, 55.
